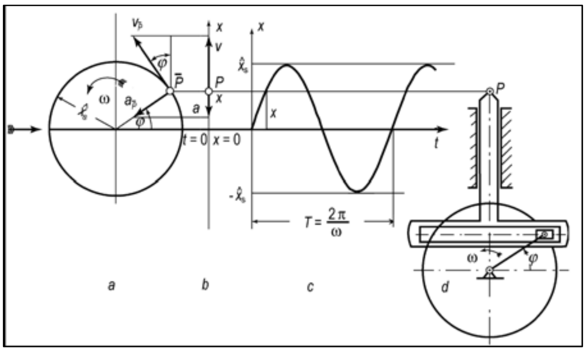
Formelzeichen (die in der Vorlesung benutzt werden)

	Anlehnung an DIN 1311.1 (2/2000)	Auch übliche Bezeichnung
Amplitude	$\hat{x}$	$\hat{\varphi}$, $\hat{y}$
Frequenz	f	f_0
Eigen-Kreisfrequenz	ω	ω_0
Phasenwinkel	φ	-
Null-Phasenwinkel beim Sinus	φ_{0s}	-
Federkonstante	k	C, c
Drehfederkonstante	k_d	C*
Dämpferkonstante	d	k
Drehdämpferkonstante	d_d	k_d
Abklingkonstante	δ	-
Logarithmisches Dekrement	Λ	-
Dämpfungsgrad	c	D
Phasenverschiebung (von Antwort zur Erregung)	ζ	ε
Kreisfrequenz der Erregung	Ω	-
Erregerfrequenz	f_{err}	-
Frquenzverhältnis	η	



Harmonische Schwingungen:

$x(t)=\hat{x}\sin\omega t$ oder $x(t)=\hat{x}\cos\omega t$

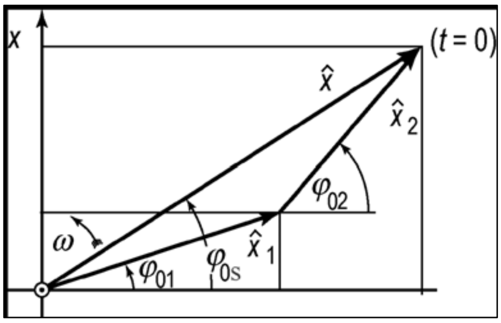
$v(t)=\hat{v}\cos\omega t$ oder $v(t)=\hat{v}\sin\omega t$

$a(t)=-\hat{a}\sin\omega t$ oder $a(t)=-\hat{a}\cos\omega t$

Wegamplitude	$\hat{x}$
Geschwindigkeitsamplitude:	$\hat{v}=\omega\,\hat{x}$
Beschleunigungsamplitude:	$\hat{a}=\omega^2\,\hat{x}=\omega\,\hat{v}$
Kreisfrequenz	ω
Frequenz	f
Schwingungsdauer	T

$$\boxed{f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{T}}$$

Harmonische Funktion erfüllt die Dgl: $\ddot{x}+\omega^2 x=0$



Addition zweier Schwingungen gleicher Frequenz:

$$x=\hat{x}_1\sin(\omega t+\varphi_{01})+\hat{x}_2\sin(\omega t+\varphi_{02})=\hat{x}\sin(\omega t+\varphi_{0s})$$

$$\hat{x}=\sqrt{\hat{x}_1^2+\hat{x}_2^2+2\hat{x}_1\hat{x}_2\cos(\varphi_{01}-\varphi_{02})},\ \tan\varphi_{0s}=\frac{\hat{x}_1\sin\varphi_{01}+\hat{x}_2\sin\varphi_{02}}{\hat{x}_1\cos\varphi_{01}+\hat{x}_2\cos\varphi_{02}}$$

Harmonische Analyse (Fourier-Reihe) periodischer Schwingungen

Grundfrequenz: $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{T_0}$

Reihenentwicklung z. B. für die Kraft-Zeitfunktion:

$F_{(t)}=F_o+F_{s1}\sin\omega_0 t+F_{s1}\cos\omega_0 t$ *mit den Amplituden*
$+F_{s2}\sin 2\omega_0 t+F_{c2}\cos 2\omega_0 t$ *als Fourier-Koeff.*
$+F_{s3}\sin 3\omega_0 t+F_{c3}\cos 3\omega_0 t$ .....

Fourierkoeffizienten
der k-ten Ordnung:

$$F_0=\frac{1}{T}\int_0^T F_{(t)}dt \quad \text{Mittelwert}$$

$$F_{ck}=\frac{2}{T}\int_0^T F_{(t)}\cos(k\omega t)dt$$

$$F_{sk}=\frac{2}{T}\int_0^T F_{(t)}\sin(k\omega t)dt$$

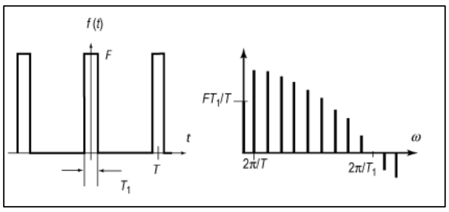
Näherungsformeln: Intervall [o,T),
2n Stützstellen

$\varphi_i=i\frac{2\pi}{2n}$ i=0,*1,2,....,2n-1*

$$F_0=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}F_i$$

$$F_{ck}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1}F_i\cos(k\varphi_i)$$

$$F_{sk}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1}F_i\sin(k\varphi_i)$$



$$f_0=F\frac{T_1}{T},\quad \hat{f}_{ck}=F\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\pi\frac{T_1}{T}\right),\quad \hat{f}_{sk}=0,\quad k=1,2,...$$

Darstellung diskreter mechanischer dynamischer Ein-Freiheitsgrad-Systeme mit verallgemeinerten Koordinaten als gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

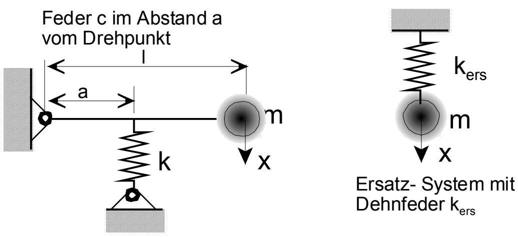
$$k_{l2}\,\ddot{q}(t) + k_{l1}\,\dot{q}(t) + k_{l0}\,q(t) = k_{r2}\,\ddot{u}(t) + k_{r1}\,\dot{u}(t) + k_{r0}\,u(t)$$

System – Parameteridentifikation - Beispiele
Starre masselose Stange mit Endmasse und mit Dehnfeder im Abstand a vom Drehpunkt:
Betrachtung als System Punktmasse mit der Vertikalschwingung q(t)=x(t): Systemparameter Ersatzsteifigkeiten: Federwirkung am Kraftangriffspunkt

a = Abstand zwischen Feder und Drehpunk
l = Abstand zwischen Kraft (Masse) und Drehpunkt

$$k_{l0} = k_{ers} = \frac{F}{x} = \left(\frac{a}{l}\right)^2 k$$

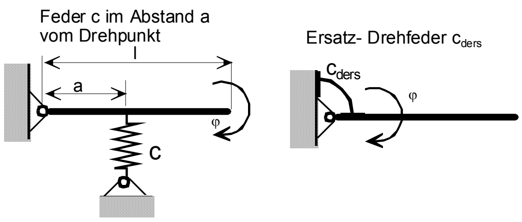
$$k_{l2} = m_{ers} = m$$



Starre Stange mit Masse und mit Dehnfeder im Abstand a vom Drehpunkt
oder System Drehmasse mit den Verdrehschwingungen $q(t)=\varphi(t)$: Systemparameter Ersatzdrehsteifigkeit: Dreh-Federwirkung

$$k_{l0} = k_{ders} = \frac{M}{\varphi} = a^2 c$$

$$k_{l2} = J_{ers} = \frac{l^2}{3} m$$



Reihenschaltung von Federn:
„gleiche Kräfte"

$$k_{ers} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Parallelschaltung von Federn:
„gleiche Wege"

$$k_{ers} = k_1 + k_1$$

Dehnfeder: Längsfederwirkung elastischer Stab , am Ende mit F in Stabrichtung belastet: $\frac{F}{x} := k_{ers} = \frac{EA}{l}$,

Biegefeder: Biegefederwirkung einseitig eingespannter Balken, am Ende mit F quer belastet: $\frac{F}{x} := k_{ers} = \frac{3EI}{l}$

Torsionsfeder: Torsionsfederwirkung einseitig eingespannter Balken, am Ende mit M belastet: $\frac{M}{j} := k_{ders} = \frac{GI_P}{l}$, $\quad I_{P\_kreis} = \frac{\pi d^4}{32}$

Freie Schwingung als Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$k_{l2}\,\ddot{q}(t) + k_{l1}\,\dot{q}(t) + k_{l0}\,q(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q}(t) + \frac{k_{l1}}{k_{l2}}\dot{q}(t) + \frac{k_{l0}}{k_{l2}}q(t) = 0$$

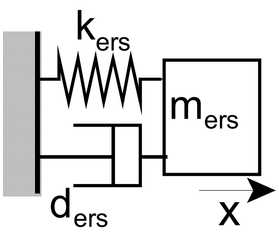
Abklingkonstante δ: $\frac{k_{l1}}{k_{l2}} = 2\delta$; **Dämpfungsmaß** $\vartheta = \frac{\delta}{\omega_1}$

Eigenkreisfrequenz ω_1: $\frac{k_{l0}}{k_{l2}} = \omega_1^2$

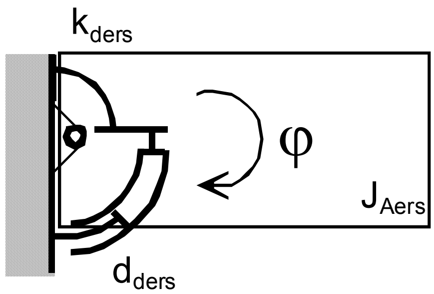
Weg-Zeit-Funktion als bei gedämpfter freier Schwingung mit den Anfangsbedingungen $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$ $(q(t) = x(t))$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[x_0 \cdot \cos(\omega_d\, t) + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d\, t)\right], \quad \omega_d = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$$

Längsschwinger:



Drehschwinger:



Bewegungsgleichung:

$$m_{ers}\ddot{x} + d_{ers}\dot{x} + k_{ers}x = 0$$

Trägheit+Dämpfung+Rückstellung

$$J_{Aers}\ddot{\varphi} + d_{ders}\dot{\varphi} + k_{ders}\varphi = 0$$

Trägheit+Dämpfung+Rückstellung

$$\ddot{x} + 2\vartheta\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\vartheta\omega_1\dot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = 0$$

mit:

$$\omega_1^2 = \frac{k_{ers}}{m_{ers}} \qquad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_{ders}}{J_{Aers}} \qquad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T_1}$$

$$d_{ers} = 2\delta m_{ers} = 2\vartheta\omega_1 m_{ers}$$

$$\delta = \frac{d_{ers}}{2m_{ers}}$$

$$\vartheta = \frac{d_{ers}}{2\sqrt{k_{ers}m_{ers}}}$$

$$d_{ders} = 2\delta J_{Aers} = 2\vartheta\omega_1 J_{Aers}$$

$$\delta = \frac{d_{ders}}{2J_{Aers}}$$

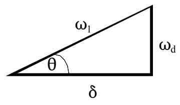
$$\vartheta = \frac{d_{ders}}{2\sqrt{k_{ders}J_{Aers}}}$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\vartheta^2}\cdot\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 2\pi f_d$$

$$\sin\theta = \frac{\omega_d}{\omega_1} = \sqrt{1-\vartheta^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\delta}{\omega_1} = \vartheta$$



Logarithmisches Dekrement

$$\Lambda := \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT_d)}\right) = \delta\cdot T_d, \quad \Lambda = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \approx 2\pi\vartheta \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

Freie Schwingung als Sprungantwort $F(t)=F_0$ für $t>0$

$$x(t) = \frac{F_0}{k_{ers}}\left[1-e^{-\delta t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d t\right)\right]$$

Harmonische Erregung:

Systembetrachtung:

Erregung= System-Eingang = $\underline{u}(t) = \hat{u}e^{i\Omega t}$

Erzwungene Schwingung = Systemausgang $\underline{q}(t) = \hat{\underline{q}}e^{j\Omega t}$

Mit der komplexen Amplitude: $\hat{\underline{q}} = \hat{q}e^{-j\varepsilon}$ und den Zeitableitungen

$$\dot{\underline{q}} = j\Omega\hat{\underline{q}}e^{j\Omega t} \qquad \ddot{\underline{q}} = -\Omega^2\hat{\underline{q}}e^{j\Omega t}$$

in DGL eingesetzt:

$$\left[k_{l2}\left(-\Omega^2\right) + k_{l1}j\Omega + k_{l0}\right]\cdot\hat{\underline{q}}\cdot e^{j\Omega t} = \hat{u}\cdot\left[k_{r1}\left(j\Omega\right) + k_{r0}\right]e^{j\Omega t}$$

Komplexer Frequenzgang als Darstellung des dynamischen Systemverhaltens mittels einer Ein- Ausgangsbeziehung:

$$\underline{H}_{qu} = \underline{H}(j\Omega) := \frac{\hat{\underline{q}}}{\hat{\underline{u}}} \text{ oder } \hat{\underline{q}} = \underline{H}(j\Omega)\cdot\hat{\underline{u}}$$

$$\underline{H}_{qu}(j\Omega) = \frac{\hat{q}}{\hat{u}} = \frac{\left[k_{r1}\left(j\Omega\right) + k_{r0}\right]}{\left[k_{l0} - k_{l2}\Omega^2\right] + j\left(k_{l1}\Omega\right)}$$

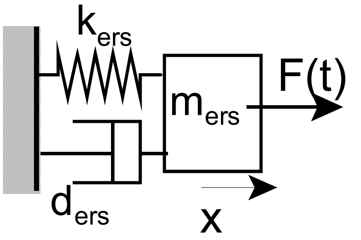
mit Amplitudengang

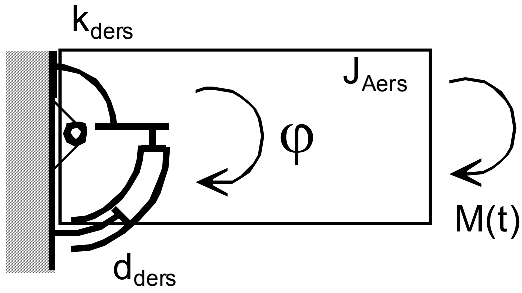
$$\left|\underline{H}_{qu}(j\Omega)\right| = \frac{\hat{q}}{\hat{u}} \frac{\sqrt{k_{r0}{}^2 + \left(k_{r1}\Omega\right)^2}}{\sqrt{\left(k_{l0} - k_{l2}\Omega^2\right)^2 + \left(k_{l1}\Omega\right)^2}}$$

und **Phasengang**:

$$\varsigma = -\left(\arctan\frac{\left(k_{r1}\Omega\right)}{\left(k_{r0} - k_{r2}\Omega^2\right)} - \arctan\frac{\left(k_{l1}\Omega\right)}{\left(k_{l0} - k_{l2}\Omega^2\right)}\right)\left(\geq 0 \text{ für kausale Systeme}\right)$$

Erzwungene Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad (Erregung durch **eine** Harmonische):





$$m_{ers}\ddot{x} + d_{ers}\dot{x} + k_{ers}x = \hat{F}\sin\Omega t$$

Trägheit + Dämpfung + Rückstellung = Erregung

oder:

$$\ddot{x} + 2\vartheta\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x = \frac{\hat{F}}{m_{ers}}\sin\Omega t$$

$$J_{Aers}\ddot{\varphi} + d_{ders}\dot{\varphi} + k_{ders}\varphi = \hat{M}\sin\Omega t$$

Trägheit + Dämpfung + Rückstellung = Erregung

oder:

$$\ddot{\varphi} + 2\vartheta\omega_1\dot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = \frac{\hat{M}}{J_{Aers}}\sin\Omega t$$

Erzwungene Schwingungen

$x(t) = \hat{x}\sin(\Omega t - \varsigma)$ bei $\hat{F}\sin\Omega t$ $\qquad$ $\varphi(t) = \hat{\varphi}\sin(\Omega t - \varsigma)$ bei $\hat{M}\sin\Omega t$

Amplitudengang und Phasengang

mit mechanischen System-Parameter

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{\left(k_{ers} - m_{ers}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{ers}\Omega\right)^2}}$$

$$\varsigma = \arctan\frac{d_{ers}\Omega}{k_{ers} - m_{ers}\Omega^2}$$

(mit $\varsigma \geq 0$ für kausale Systeme)

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{M}}{\sqrt{\left(k_{ders} - J_{Aers}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{ders}\Omega\right)^2}}$$

$$\varsigma = \arctan\frac{d_{ders}\Omega}{k_{ders} - J_{Aers}\Omega^2}$$

(mit $\varsigma \geq 0$ für kausale Systeme)

mit schwingungstechnischen System-Parametern

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}}{m_{ers}}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (2\vartheta\omega_1\Omega)^2}}$$

$$\varsigma = \arctan\frac{2\vartheta\omega_1\Omega}{\omega_1^2 - \Omega^2}(\geq 0)$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\frac{\hat{M}}{J_{Aers}}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (2\vartheta\omega_1\Omega)^2}}$$

$$\varepsilon = \arctan\frac{2\vartheta\omega_1\Omega}{\omega_1^2 - \Omega^2} \geq 0$$

mit schwingungstechnischen System-Parametern in dimensionsloser Form

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}}{k_{ers}}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta\right)^2}}, \eta = \frac{\Omega}{\omega_1}$$

$$\varsigma = \arctan\frac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2}(\geq 0)$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\frac{\hat{M}}{k_{ders}}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta\right)^2}}; \eta = \frac{\Omega}{\omega_1}$$

$$\varsigma = \arctan\frac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2}(\geq 0)$$

Resonanzfrequenz: Diejenige Erregerfrequenz, bei der die Amplitude der erzwungenen Schwingung am größten sind:

$$\boxed{\hat{x}_{max} \text{ bei } \Omega = \Omega_R = \sqrt{1-2\vartheta^2}\,\omega_1 \text{ für } \vartheta < 1/\sqrt{2} = 0{,}71}$$

Bei mehreren harmonischen Erregungen Anwendung der Superposition (bei linearen Systemen): $x(t) = \hat{x}_1\sin(\Omega_1 t - \varsigma_1) + \hat{x}_2\sin(\Omega_2 t - \varsigma_2)$ bei $\hat{F}_1\sin\Omega_1 t + \hat{F}_2\sin\Omega_2 t$

Vergrößerungsfunktion V_1 für dimensionslose Darstellung:

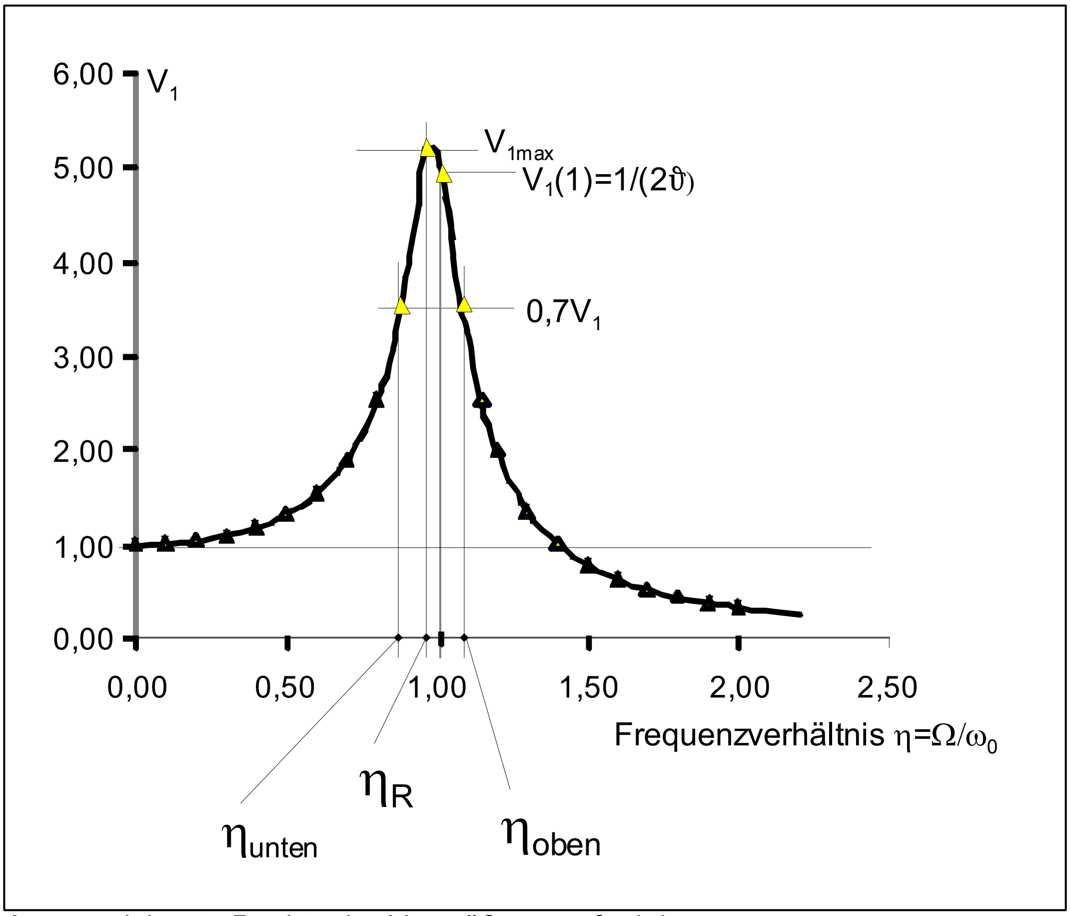
3 $\Rightarrow \hat{x}_{dyn} = V_1(\eta)\ \frac{\hat{F}}{k_{ers}} = V_1(\eta)\ \hat{x}_{stat}$ $\quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}},\ \eta = \frac{\Omega}{\omega_1}$

Merke:

Resonanz: Erregung bei $\eta = \eta_R = \sqrt{1-2\vartheta^2}$ für $\vartheta < 1/\sqrt{2} = 0{,}71$;

und maximale Amplitude mit $V_{1\,max} = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}$

Erregung bei $\eta=1$: $V_1(\eta=1) = \frac{1}{2\vartheta}$; Phase $\varsigma(\eta=1) = \frac{\pi}{2}$ unabhängig von der Dämpfung;



Ausgezeichnete Punkte der Vergrößerungsfunktion

Für sehr kleine Dämpfungen gilt:

$$\Omega_{oben} \cong (1+\vartheta)\ \omega_1; \quad \Omega_{unten} \cong (1-\vartheta)\ \omega_1;$$

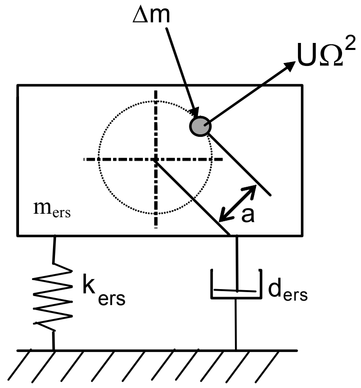
bzw.

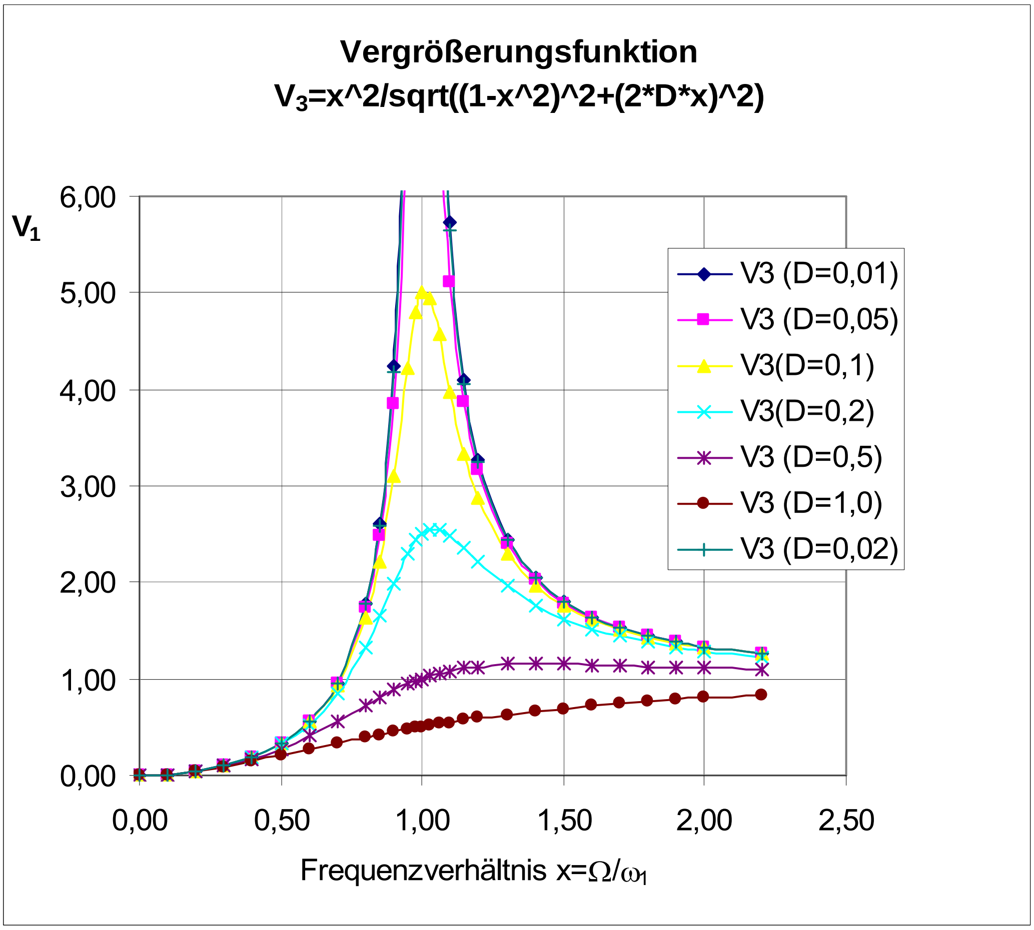
$$\vartheta \cong \frac{\Omega_{oben} - \Omega_{unten}}{\Omega_{oben} + \Omega_{unten}}; \quad \omega_1 \cong \frac{\Omega_{oben} - \Omega_{unten}}{2}$$

Massenkraftanregung: $m_{ers}\ddot{x}+d_{ers}\dot{x}+k_{ers}x=U\Omega^2 \times \sin\Omega t$

$U = \Delta ma$ Unwucht, $e = \dfrac{U}{m_{ers}}$ Exzentr.

$$V_3 = \frac{\hat{x}}{e} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}}\ , \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_1}$$





Schwingungsisolation:

Bodenkraft soll minimiert werden (Emmissionsschutz):

$$F_{Bo} = d_{ers}\dot{x} + k_{ers}x = d_{ers}\Omega\hat{x}\cos(\Omega t-\varepsilon) + k_{ers}\hat{x}\sin(\Omega t-\varepsilon)$$

$$F_{Bo} = \sqrt{(d_{ers}\Omega\hat{x})^2 + (k_{ers}\hat{x})^2}\ \sin(\Omega t-\varepsilon+\beta)$$

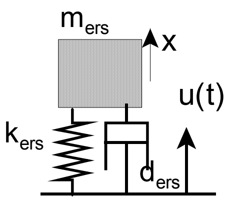
$$\hat{F}_{Bo} = \sqrt{(d_{ers}\Omega\hat{x})^2 + (k_{ers}\hat{x})^2} = \sqrt{(2\vartheta\eta)^2+1}\ k_{ers}\hat{x}$$

Durchlässigkeit (Transmissibility):

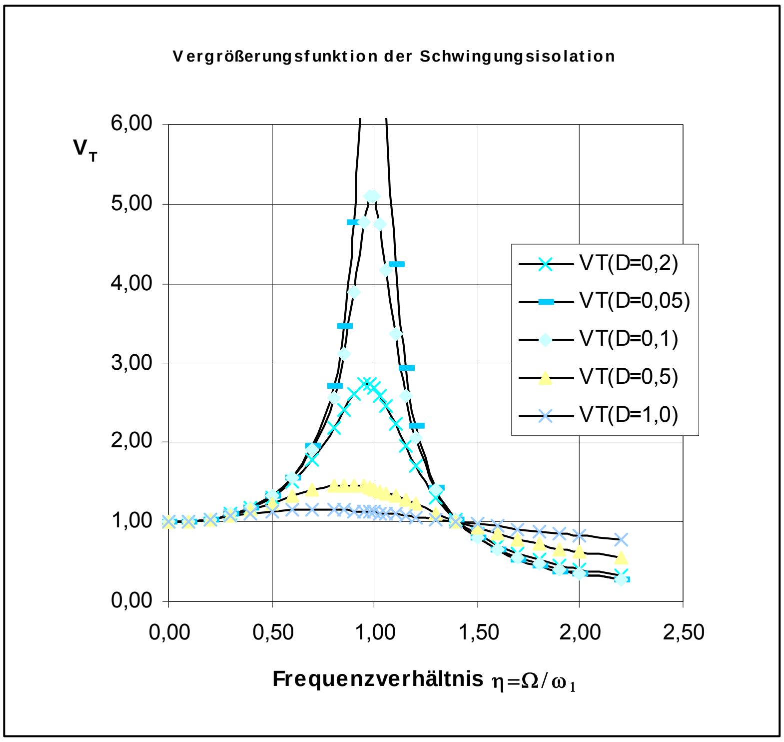
$$V_T = \frac{\hat{F}_{Bo}}{\hat{F}_{Err}} = \frac{\sqrt{1+(2\vartheta\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}}, \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_1} \quad \text{mit Isolierwirkung für } V_T \text{ □ } 1$$

Schwingung infolge **Erschütterungen** soll minimiert werden (Immissionsschutz):

$$m_{ers}\ddot{x} + d_{ers}\dot{x} + k_{ers}x = d_{ers}\dot{u} + k_{ers}u$$



$$V_T = \frac{\hat{x}}{\hat{u}} = \frac{\sqrt{1+(2\vartheta\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}}, \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_1}$$



Für **Kunststoff (Elastomere)** Ansatz für Werkstoff-Dämpfung als „komplexer E-Modul" bzw. komplexe Steifigkeit $\underline{k}_{ers} = k_{ers}(1+iv_k)$ für frequenzunabhängige Dämpfung (Hysterese, Weg abhängige Dämpfung, **Kenn-Verlustfaktor** $v_k = 2\vartheta$, **Verlustfaktor** $v = 2\vartheta\eta$)

$$V_{Tk} = \frac{\hat{x}}{\hat{u}} = \frac{\sqrt{1+v_k^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+v_k^2}}, \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_1};$$

Periodische Anregung mit der Periodendauer T_0:

System: $m_{ers}\ddot{x} + d_{ers}\dot{x} + k_{ers}x = \hat{F}\sin\Omega t$

$$
\begin{aligned}
F(t) = F_0 &+ \\
&+\hat{F}_{s1}\sin(\Omega_0 t)+\hat{F}_{c1}\cos(\Omega_0 t) \qquad \text{Erregung 1. Ordnung}\\
&+\hat{F}_{s2}\sin(2\Omega_0 t)+\hat{F}_{c2}\cos(2\Omega_0 t) \qquad \text{Erregung 2. Ordnung}\\
&+\hat{F}_{s3}\sin(3\Omega_0 t)+\hat{F}_{c3}\cos(3\Omega_0 t) \qquad \text{Erregung 3. Ordnung}\\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Periodische Antwort als Überlagerung der Einzelantworten

$$
\begin{aligned}
x(t) = x_0 &+ \\
&+\hat{x}_{s1}\sin(\Omega_0 t)+\hat{x}_{c1}\cos(\Omega_0 t) \qquad \text{Antwort 1. Ordnung}\\
&+\hat{x}_{s2}\sin(2\Omega_0 t)+\hat{x}_{c2}\cos(2\Omega_0 t) \qquad \text{Antwort 2. Ordnung}\\
&+\hat{x}_{s3}\sin(3\Omega_0 t)+\hat{x}_{c3}\cos(3\Omega_0 t) \qquad \text{Antwort 3. Ordnung}\\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Antwort - Gleichanteil (quasi-statisch): $x_0 = F_0/k_{ers}$

Amplituden der erzwungenen (harmonischen) Schwingungen der i-ten Harmonischen

$$\hat{x}_i = V_1(\eta_i)\left(\frac{\hat{F}_i}{k_{ers}}\right);\ \varsigma_i = \arctan\frac{2\vartheta\eta_i}{1-\eta_i^2}(\geq 0)$$

$$\text{mit } V_1(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta_i^2\right)^2+\left(2\vartheta\eta_i\right)^2}},\quad \eta_i = \frac{i\,\Omega_0}{\omega_1}$$

Beispiel: Amplituden der erzwungenen harmonischen Schwingungen (ungedämpft):

$$\hat{x}_{1s} = \frac{\hat{F}_{1s}}{\left(k_{ers} - m_{ers}\Omega_0^2\right)} = \frac{\frac{\hat{F}_{1s}}{k_{ers}}}{1-\eta_0^2} \quad \text{für } \hat{F}_{1s}\sin(\Omega_0 t),\ (1.\text{Ordnung}),$$

$$\hat{x}_{1c} = \frac{\hat{F}_{1c}}{\sqrt{\left(k_{ers} - m_{ers}\Omega_0^2\right)^2}} = \frac{\frac{\hat{F}_{1c}}{k_{ers}}}{1-\eta_0^2} \quad \text{für } \hat{F}_{1c}\cos(\Omega_0 t),\ (1.\text{Ordnung}),$$

$$\hat{x}_{2s} = \frac{\hat{F}_{2s}}{\sqrt{\left(k_{ers} - m_{ers}(2\Omega_0)^2\right)^2}} = \frac{\frac{\hat{F}_{2s}}{k_{ers}}}{1-(2\eta_0)^2} \quad \text{für } \hat{F}_{1s}\sin(2\Omega_0 t),\ (2.\text{Ordnung}),$$

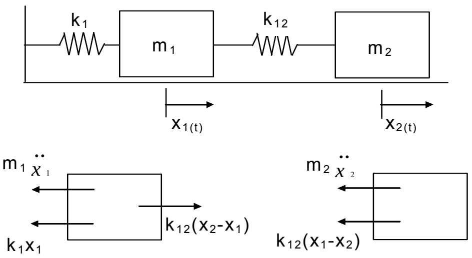
usw. .....

Im ungedämpften Fall bedeuten die negativen „Amplituden“ eine Phasenverschiebung zwischen Erregung und Antwort von $\varsigma_i = \pi$.

Resonanz bei den kritischen Erregerkreisfrequenzen:

$$i\cdot\Omega_{0krit,i} = \omega_1 \quad \text{bzw.} \quad \Omega_{0krit,i} = \frac{\omega_1}{i},\quad i = 1,2,\ldots.$$

Mehrere Freiheitsgrade – Beispiel für Modalanalyse (Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen:



DgIn:

$$\boxed{\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_{12}(x_2-x_1)=0 \\ &m_2\ddot{x}_2+k_{12}(x_2-x_1)=0 \end{aligned}}$$

Massenmatrix:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix}$$

<u>Schwingungsansatz führt auf die Bedingung für die Amplituden:</u>

$$\left[-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right]\cdot\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$$

Oder ausführlich in **Matrix - Schreibweise**:

$$\left[-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2m_1+k_1+k_{12} & 0+(-k_{12}) \\ 0+(-k_{12}) & -\omega^2m_2+k_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$(-\omega^2m_1+k_1+k_{12})\hat{x}_1+(-k_{12})\hat{x}_2=0 \quad (1)$$

$$(-k_{12})\hat{x}_1+(-\omega^2m_2+k_{12})\hat{x}_2=0 \quad (2)$$

Bedingung für nicht-triviale Lösung: Determinante der Koeffizientenmatrix muss verschwinden:

$$\det\left[-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right]=0$$

$$\det\left[-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix} -\omega^2m_1+k_1+k_{12} & 0+(-k_{12}) \\ 0+(-k_{12}) & -\omega^2m_2+k_{12} \end{bmatrix}=0$$

Eigenwertgleichung:

$$\left(-\omega^2m_1+k_1+k_{12}\right)\left(-\omega^2m_2+k_{12}\right)-\left(-k_{12}\right)\left(-k_{12}\right)=0$$

$\Rightarrow$ **Polynom n-ten Grades in (ω^2)**

$$\left[\ m_1\ m_2\ \right]\left(\omega^2\right)^2-\left[m_1k_{12}+m_2\left(k_1+k_{12}\right)\ \right]\left(\omega^2\right)+k_1k_{12}=0$$

⇒ Lösungen (Nullstellen) sind die **Eigenkreisfrequenzen**:

$$a\left(\omega^2\right)^2 + b\left(\omega^2\right) + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für das Beispiel mit k_1=k_1=k und m_1=m_2=m lautet die Eignkreisfrequenzgleichung

$$\left(\omega^2\right)^2 - 3\frac{k}{m}\left(\omega^2\right) + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{mit den Lösungen}$$

$$\omega_1^{\,2} = 0{,}382\frac{k}{m},\ \omega_2^{\,2} = 2{,}618\frac{k}{m} \ \text{bzw.}\ \omega_1 = 0{,}618\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = 1{,}618\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Eigenvektoren – Eigenschwingungsformen – Amplitudenverhältnisse

aus Gleichung (1) oder (2) mit $\omega=\omega_i$:

$$\frac{\hat{x}_{2i}}{\hat{x}_{1i}} = \frac{-\omega_i^{\,2} m_1 + k_1 + k_{12}}{k_{12}} \ (1) \text{ oder aus } \frac{\hat{x}_{2i}}{\hat{x}_{1i}} = \frac{k_{12}}{-\omega_i^{\,2} m_2 + k_{12}} \ (2)$$

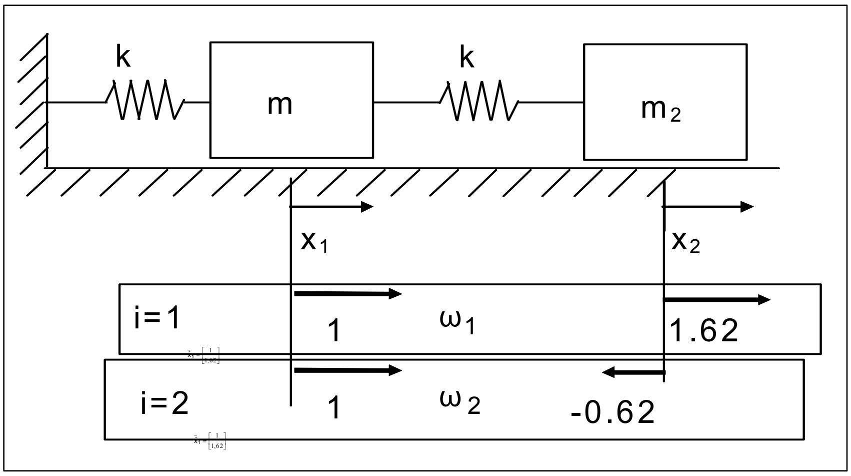
Für das Beispiel mit c_1=c_1=c und m_1=m_2=m ergeben sich mit obigen Eigenkreisfrequenzen die (auf eine Amplitude normierten) Eigenvektoren

$$\frac{\hat{x}_{21}}{\hat{x}_{11}} = \frac{-\omega_1^{\,2} m + 2k}{k} = \frac{-0{,}382\frac{k}{m}m + 2k}{k} = -0{,}382+2 = 1{,}618 \qquad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}62 \end{bmatrix}$$

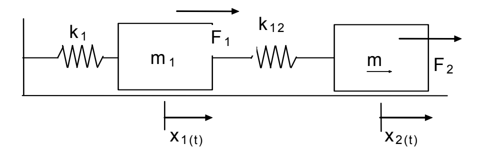
$$\text{oder aus } \frac{\hat{x}_{21}}{\hat{x}_{11}} = \frac{k}{-\omega_2^{\,2} m + k} = \frac{k}{-0{,}382\frac{k}{m}m + k} = \frac{1}{-0{,}382+1} = 1{,}618$$

$$\frac{\hat{x}_{22}}{\hat{x}_{12}} = \frac{-\omega_2^{\,2} m + 2k}{k} = \frac{-2{,}618\frac{k}{m}m + 2k}{k} = -2{,}618+2 = -0{,}618 \qquad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$

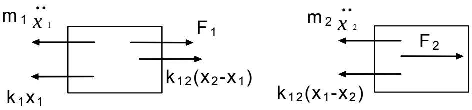
$$\text{oder aus } \frac{\hat{x}_{21}}{\hat{x}_{11}} = \frac{k}{-\omega_2^{\,2} m + k} = \frac{k}{-2{,}618\frac{k}{m}m + k} = \frac{1}{-2{,}618+1} = -0{,}618$$



Mehrere Freiheitsgrade- Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung



$$\boxed{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_{12}(x_2-x_1)&=F_1\\ m_2\ddot{x}_2+k_{12}(x_2-x_1)&=F_2\end{aligned}}$$



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

Darstellung mit der **Nachgiebigkeitsmatrix (Einflusszahlen)**

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(\mathrm{t})$; oder $\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{E}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}^*(\mathrm{t})$

$\mathbf{M}$ Massematrix; $\mathbf{K}=\left(k_{\mathbf{ij}}\right)$ Steifigkeitsmatrix; $\mathbf{N}=\left(\alpha_{\mathbf{ij}}\right)$ Nachgiebigkeitsmatrix

$\mathbf{M}^*$ verallgemeinerte Massematrix; $\mathbf{K}^*$ verallgemeinerte Steifigkeitsmatrix=$\mathbf{E}$ Einheitsmatrix

$\mathbf{K}=\mathbf{N}^{-1}$; $\mathbf{M}^*=\mathbf{N}\mathbf{M}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$; $\mathbf{F}^*(t)=\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t)=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$;

$\mathbf{N}=\mathbf{K}^{-1}$; $\mathbf{M}=\mathbf{K}\mathbf{M}^*$: $\mathbf{F}(t)==\mathbf{K}\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t)$

$$x=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & m_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & m_n\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \dots & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1}+k_n\end{bmatrix}$$

Komplexe Berechnung (bei Dämpfung zweckmäßig):

mit $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\hat{\mathbf{x}}}\, e^{i\Omega t}$ bei einer Erregung $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\hat{\mathbf{F}}}\, e^{i\Omega t}$

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}=\begin{bmatrix}\underline{\hat{x}}_1\\ \underline{\hat{x}}_2\\ \dots\\ \underline{\hat{x}}_n\end{bmatrix},\quad \underline{\hat{\mathbf{F}}}=\begin{bmatrix}\underline{\hat{F}}_1\\ \underline{\hat{F}}_2\\ \dots\\ \underline{\hat{F}}_n\end{bmatrix};$$

Amplituden(-Vektor) $\underline{\hat{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{H}}_{xF}(i\Omega)\,\underline{\hat{\mathbf{F}}}$

(Komplexer Nachgiebigkeits-) Frequenzgang

$$\underline{\mathbf{H}}_{xF}(i\Omega)=\left[(-\Omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\right]^{-1}$$

Bsp: Zwei Gleichungen für zwei (unbekannte) „Amplituden"

$$\begin{bmatrix}-\Omega^2 m_1+k_1+k_{12} & 0+(-k_{12})\\ 0+(-k_{12}) & -\Omega^2 m_2+k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{F}_1\\ \hat{F}_2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\text{Gl 1}\\ \text{Gl 2}\end{bmatrix}$$

Lösung des Gleichungssysgtems für die beiden unbekannten Amplituden

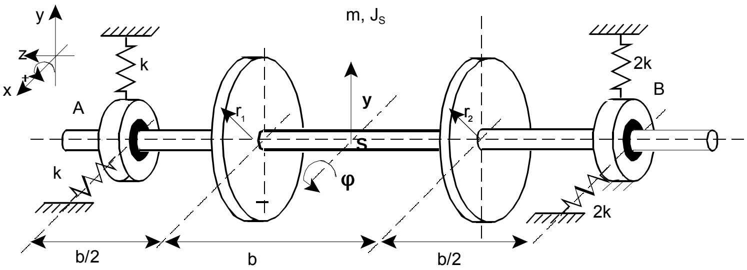
$$\hat{x}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\quad\text{und}\quad \hat{x}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad \Delta=\begin{vmatrix}(-\Omega^2 m_1+k_1+k_{12}) & (-k_{12})\\ (-k_{12}) & (-\Omega^2 m_2+k_{12})\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\hat{F}_1 & (-k_{12})\\ \hat{F}_2 & (-\Omega^2 m_2+k_{12})\end{vmatrix}\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}(-\Omega^2 m_1+k_1+k_{12}) & \hat{F}_1\\ (-k_{12}) & \hat{F}_2\end{vmatrix}$$

Tilgung: Der Massenpunkt, der angeregt wird, soll in Ruhe bleiben.
Bsp:

$\hat{F}_2=0$, nur $\hat{F}_1$ mit $\hat{x}_1=0$: $\Rightarrow$ $(-\Omega_T{}^2 m_2+k_{12})\hat{x}_2=0$ aus (2) $\Rightarrow$ mit $\hat{x}_2\neq 0$: $\Omega_T{}^2=\dfrac{k_{12}}{m_2}$

Massenausgleich rotierender Trägheitswirkungen (**auswuchten**):



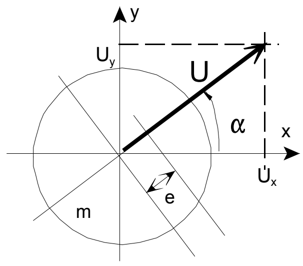
Unwucht:

Zentrifugalkraft: $\vec{F}=\Omega^2\vec{U}$

(statische) Unwucht nach Betrag(z. B. in g mm) U =me

und Richtung (bzgl. mitrotierendem x,y-KS): Winkel α

$\vec{U}=\begin{pmatrix}U_x\\U_y\end{pmatrix}$



Statischer Ausgleich: $\vec{U}_{Aus}+\vec{U}_{vorhanden}=\vec{0}$

Dynamischer Ausgleich: zusätzlich Ausgleich der Drehwirkungen der Massenkräfte: $\vec{M}_{Aus}+\vec{M}_{vorhanden}=\vec{0}$

Ausgleich in zwei Ebenen

Berechnung der Ausgleichsunwuchten : $\vec{U}_{Aus\,1}$ und $\vec{U}_{Aus\,2}$ mit:

$$\begin{pmatrix}U_{A1x}\\U_{A1y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{A2x}\\U_{A2y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{vorhx}\\U_{vorhy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}M_{A1x}\\M_{A1y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_{A2x}\\M_{A2y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_{vorhx}\\M_{vorhy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}$$

$$\Delta m_{Aus\ i}=\frac{\left|\vec{U}_{Aus\ i}\right|}{r_m}\ ,\ i=1,2$$

Massenausgleich oszillierender Trägheitswirkungen:
Beurteilung entsprechend den Drehzeigerbildern, Kröpfung ist jeweils zu beachten.

1. Ordnung: $m_k r\Omega^2(\sin\Omega t+\beta_{kr})$ 2. Ordnung: $m_k r\Omega^2\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{15}{158}\lambda^5\right)\sin\left(2\Omega t+2\beta_{kr}\right)$

3. Ordnung: - 4. Ordnung: $m_k r\Omega^2\left(\frac{\lambda^3}{4}+\frac{3}{16}\lambda^5\right)\sin\left(4\Omega t+4\beta_{kr}\right)$

5. Ordnung: - 6. Ordnung: $m_k r\Omega^2\left(\frac{9}{128}\lambda^5\right)\sin\left(6\Omega t+6\beta_{kr}\right)$

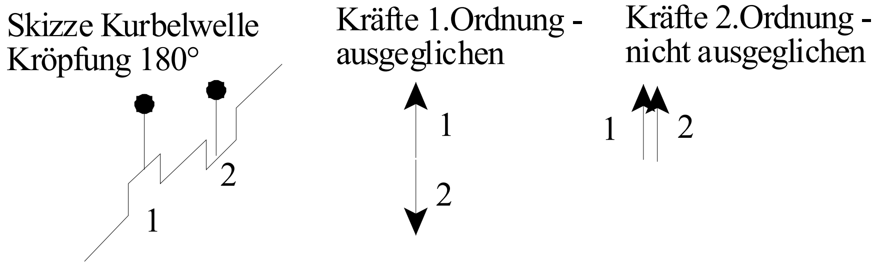
Resonanzen bei 1. Ordnung: $n_{k1}=\frac{\omega_1}{2\pi}$ 2. Ordnung: $2n_{k2}=\frac{\omega_1}{2\pi}$ 4. Ordnung: $4n_{k4}=\frac{\omega_1}{2\pi}$

Und bei Viertakter (infolge der Druckkräfte bei nur jeden 2. Umlauf)

0.5. Ordnung: $0{,}5n_{k0.5}=\frac{\omega_1}{2\pi}$; 1. Ordnung: $n_{k1}=\frac{\omega_1}{2\pi}$; 1.5. Ordnung: $1{,}5n_{k1.5}=\frac{\omega_1}{2\pi}$;

2. Ordnung: $2n_{k2}=\frac{\omega_1}{2\pi}$; 2.5. Ordnung: $2{,}5n_{k2.5}=\frac{\omega_1}{2\pi}$; ...

Beurteilung mit Drehzeiger (z. B. Zweizylinder):



1. Ordnung: $F_1(t)= m_O r\Omega^2 \;\big(\sin(\Omega t) + \sin(\Omega t+\pi)\big)=0$ Kräfte ausgeglichen, „Momente“ nicht ausgeglichen.
2. Ordnung: $F_2(t)= m_O r\Omega^2 \;\lambda\; \big(\sin(2\Omega t) + \sin(2\Omega t+2\pi)\big)\neq 0$ Kräfte nicht ausgeglichen, „Momente“ ausgeglichen.

Kontinuumsschwingungen

Saitenschwingungen (Vorspannkraft F_0, Massebelegung m/l) $\boxed{\omega_k = k\,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F_0}{\mu}}\;;\;\mu=\frac{m}{l}}$

Stab - Längsschwingungen (stehende ebene Welle; Schallgeschwindigkeit: $\boxed{c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$

Randbedingung: fest – fest und frei – frei: $\boxed{\omega_k = k\,\frac{\pi}{l}\,c}$

Randbedingung: fest – frei: $\boxed{\omega_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\,c}$

Torsionsschwingungen (runder Querschnitt) wie bei Längsschwingungen mit Schubmodul G anstelle von E-Modul.

Biegeschwingungen

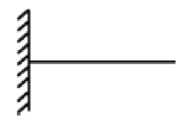
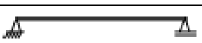
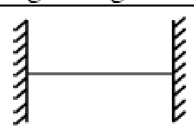
a)  eingespannt - frei	$\varkappa = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$ $\omega_1 = 0{,}356\,\varkappa$ $\omega_k \cong \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \varkappa,\ k = 2, 3, \ldots$
b)  gelenkig - gelenkig	$\omega_k = k^2\,\varkappa\ ,\ h = 1, 2, \ldots$
c)  eingespannt - gelenkig	$\omega_k = \left(k+\frac{1}{4}\right)^2 \varkappa,\ k = 1, 2, \ldots$
d)  eingespannt - eingespannt	$\omega_k \cong \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \varkappa,\ k = 2, 3, \ldots$

Bild 10.8 Eigenkreisfrequenzen am schwingender Balken

Technische Akustik
(Wellenlinie für Effektivwerte, Querstriche für Mittelwerte)

Ebene Welle	$p(x,t) = z_0\ v(x,t)$
Schallwechseldruck	p
Schallschnelle	v
Effektivwerte (Tilde)	$\tilde{p}$, $\tilde{v}$
Schallgeschwindigkeit	Luft: $c=\sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}$, ($\approx$ 343 m/s) Flüssigkeit: $c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$, Festkörper: $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Schallleistung	$P = \tilde{p}\ A\ \tilde{v} = z_0\ A\ \tilde{v}^2 = \frac{1}{z_0}\ A\ \tilde{p}^2$
Schallintensität	$J = \frac{P}{A} = \tilde{p}\ \tilde{v} = z_0\ \tilde{v}^2 = \frac{1}{z_0}\ \tilde{p}^2$
Schallwellenwiderstand (ebene Welle)	$z_0 = \rho_0\ c$
Schalldruckpegel	$L_p = 20 \log \frac{\tilde{p}}{p_0}$; $p_0 = 2.10^{-5}$ Pa $= 2.10^{-5}\ \frac{N}{m^2}$
Schallleistungspegel	$L_p = 10 \log \frac{P_W}{P_0}$; $P_0 = 10^{-12}$ W

Frequenzgemisch – Analyse

Terzband:	$f_o = 2^{\frac{1}{3}} f_u = 2^{\frac{1}{6}} f_m$, $\Delta f = 0.23\ f_m$;
Oktavband:	$f_o = 2 f_u = \sqrt{2} f_m$, $\Delta f = 0.71\ f_m = 0.5\ f_o = f_u$
Innerhalb eines Bandes	$\tilde{v}_i \approx 2\pi f_m \tilde{u}_i$, $\tilde{a}_i \approx 2\pi f_m \tilde{v}_i$

„Addition“ der Effektivwerte „quadratisch“:

$$\tilde{p} = \sqrt{\sum \tilde{p}_i^2}\ ,\ \tilde{v} = \sqrt{\sum \tilde{v}_i^2}$$

Addition der Pegel: $L = 10 \log \left[10^{\frac{L_1}{10}} + 10^{\frac{L_2}{10}} + 10^{\frac{L_3}{10}} \right]$

Reflexionsfaktor	$r_F := \frac{\tilde{p}_{refl}}{\tilde{p}_{einf}} = \frac{z_{o2} - z_{o1}}{z_{o2} + z_{o1}}$ (ebene Welle, senkrechter Einfall)
Reflexionsgrad	$r_G = r_F^{\ 2}$
Absorptionsgrad	$a_G = 1 - r_G$

Schalldämmmaß $R = 10 \log \frac{J_E}{J_D} = 20 \log \frac{\tilde{p}_E}{\tilde{p}_D}$