

Knobelaufgabe Mathematikwettbewerb WS 2016/2017

Liebe Knobelfreunde!

Da ich die Hochschule Esslingen am 1. September 2016 verlassen habe und nun an der HfT Stuttgart tätig bin, kommt heute meine letzte Knobelaufgabe. Umso mehr würde ich mich über eine rege Beteiligung freuen!

Hier die Wettbewerbsfrage:

Um sich von ihrem Professor Herrn S. zu verabschieden, entscheiden sich die Studenten, ihm Pralinen zu schenken. Sie kommen darin überein, dass keine Praline mehr als ein Euro kosten soll.

Die Studentin Anna und der Student Bert ziehen also los, um einzukaufen. Beide sind 3 Tage unterwegs: Mittwoch, Donnerstag und Freitag.

Am Wochenende erzählt Anna:

„Am Mittwoch habe ich eine bestimmte Anzahl Pralinen von einer Sorte gekauft. Donnerstags kaufte ich eine Praline weniger als am Mittwoch, wiederum von einer Sorte. Jede Praline war um 20 Cent teurer als am Mittwoch. Am Freitag kaufte ich nochmal eine Praline weniger als am Donnerstag, wiederum alle von einer Sorte. Jede Praline war um 20 Cent teurer als am Donnerstag.“

Bert erzählt:

„Bei mir war es ganz ähnlich: Am Mittwoch habe ich eine bestimmte Anzahl Pralinen von einer Sorte gekauft. Donnerstags kaufte ich eine Praline mehr als am Mittwoch, wiederum von einer Sorte. Jede Praline war um 20 Cent billiger als am Mittwoch. Am Freitag kaufte ich nochmal eine Praline mehr als am Donnerstag, wiederum alle von einer Sorte. Jede Praline war um 20 Cent billiger als am Donnerstag.“

Als Anna und Bert hinzufügten, dass sie beide genau 28,67€ in Summe bezahlt haben, kam die Vermutung auf, dass sie die gleichen Preise für die Pralinen bezahlt haben und von jeder Sorte die gleiche Anzahl gekauft haben.

Beides stimmt aber nicht!

Wie viele Pralinen hatte Anna mehr gekauft als Bert?

Viel Spaß!

Lösung

Es bietet sich bei der Aufgabe an, die mittlere Anzahl von Pralinen zum Maß der Dinge zu machen.

Sei m_A die Anzahl mittlerer Pralinen, die Anna zum Preis von p_A Cent pro Stück einkauft. So ergibt sich folgende Gleichung:

$$(m_A + 1)(p_A - 20) + m_A \cdot p_A + (m_A - 1)(p_A + 20) = 2867$$

Sei m_B die Anzahl mittlerer Pralinen, die Bert zum Preis von p_B Cent pro Stück einkauft.

So ergibt sich folgende Gleichung:

$$(m_B - 1)(p_B + 20) + m_B \cdot p_B + (m_B + 1)(p_B - 20) = 2867$$

Außerdem soll laut Aufgabenstellung $m_A \neq m_B$ und $p_A \neq p_B$ sein.

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich (jeweils nach Ausmultiplizieren):

$$m_A \cdot p_A = 969$$

und

$$m_B \cdot p_B = 969$$

Da $m_A - 1$ und $m_B - 1$ positiv sein müssen und außerdem $p_A - 20$, $p_A + 20$, $p_B - 20$ und $p_B + 20$ zwischen 1 und 99 (jeweils inklusive) liegen müssen, gelten noch die folgenden Randbedingungen:

$$m_A \geq 2, \quad m_B \geq 2, \quad 21 \leq p_A \leq 79, \quad 21 \leq p_B \leq 79$$

Somit erhalten wir mit $m_A = \frac{969}{p_A}$ und $m_B = \frac{969}{p_B}$ die Bedingungsgleichungen:

$$13 \leq m_A \leq 46 \text{ und } 13 \leq m_B \leq 46$$

m_A , m_B , p_A und p_B sind ganzzahlig. Die Zahl 969 lässt sich wie folgt in ihre Primfaktoren zerlegen:

$$969 = 3 \cdot 17 \cdot 19,$$

was nur die Möglichkeiten $m_A = 19$ und $m_B = 17$ zulässt, da Anna laut Aufgabe mehr Pralinen als Bert gekauft hat. Für die Preise, die nicht gefragt waren, ergibt sich:

$$p_A = 51, \quad p_B = 57$$

Annas Gleichung lautet damit:

$$20 \cdot 31 + 19 \cdot 51 + 18 \cdot 71 = 2867$$

Berts Gleichung lautet:

$$16 \cdot 77 + 17 \cdot 57 + 15 \cdot 37 = 2867$$

Folglich hat Anna $20 + 19 + 18 = 57$ Pralinen und Bert $16 + 17 + 18 = 51$ Pralinen gekauft. Anna hat also 6 Pralinen mehr gekauft als Bert.

Mein Dank gilt der Seite www.mathe-spass.de. Die Idee der Aufgabe stammt von dort.