36. MATHEMATIKWETTBEWERB

Fragen und Antworten: Thema, Frage a)

Thema der Fragen: 20 und 19

a) Bei wie vielen 19-stelligen natürlichen Zahlen beträgt das Produkt der Ziffern 20?

Vorgehen: Mögliche Ziffernkombinationen sind nur

i) einmal 5, einmal 4, 17-mal 1 und

ii) einmal 5, zweimal 2, 16-mal 1.

Die Anzahl der Permutationen dieser Ziffern sind

bei i) $\frac{19!}{1!\,1!\,17!} = 342$ und bei ii) $\frac{19!}{1!\,2!\,16!} = 2907.$

Antwort: bei 342 + 2907 = 3249 Zahlen.

36. MATHEMATIKWETTBEWERB

Fragen und Antworten: Frage b)

b) Wie viele 20-stellige natürliche Zahlen sind durch 19 teilbar?

Vorgehen: Die kleinste durch 19 teilbare 20-stellige Zahl ist $n_{min} = 10^{19} + 9$, die größte ist $n_{max} = 10^{20} - 5$.

Antwort:
Es gibt $\frac{1}{19}(n_{max} - n_{min}) + 1$ = 4736842105263157895 durch 19 teilbare 20-stellige Zahlen.

36. MATHEMATIKWETTBEWERB

Fragen und Antworten: Frage c)

c) Welche 19-stellige natürliche Zahl hat genau 19 natürliche Zahlen als Teiler?

Vorgehen: Ist $n = \prod {p_i}^{k_i}$ die Primfaktorzerlegung von n, so hat n genau $\prod (k_i + 1)$ Teiler.

Beispiel: $96 = 2^5 \cdot 3^1$ hat $(5 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ Teiler.

Nur wenn $n = p^{18}$ mit einer Primzahl p ist, kann n genau $18 + 1 = 19$ Teiler haben.

Die einzige Primzahl p, bei der p^{18} eine 19-stellige Zahl ist, ist $p = 11$.

Antwort: $11^{18} = 5559917313492231481$.

36. MATHEMATIKWETTBEWERB

Fragen und Antworten: Frage d)*

d) Bei wie vielen 20-stelligen natürlichen Zahlen beträgt die Summe der Ziffern 20?

Verschiedene Lösungswege sind möglich.
Vorgehen aus einer prämierten Einsendung:

Bijektion Ziffer i ↔ Würfelzahl i+1.

Z. B. Zahl 2 8 0 9 4 … 5 ↔
Würfelzahlen 3 9 1 10 5 … 6

Summe der n Ziffern = p ↔ Augensumme = p+n,
hier:
Summe der 20 Ziffern = 20 ↔ Augensumme = 40

36. MATHEMATIKWETTBEWERB

Fragen und Antworten: Frage d)* [Fortsetzung]

Die Anzahl der Möglichkeiten, mit n jeweils s-seitigen Würfeln die Augensumme p zu erreichen, ist bekannt:

$$c(n, p, s) = \sum_{k=0}^{\lfloor (p-n)/s \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{p - sk - 1}{n - 1}$$

http://mathworld.wolfram.com/Dice.html zitiert hierzu J. V. Uspensky (1937).

Antwort: $c(20{,}40{,}10) - \underbrace{c(19{,}39{,}10)}$ = 35194002709

$\uparrow$

Die erste Ziffer darf nicht 0 sein $\leftrightarrow$
der erste Würfel darf nicht 1 zeigen.