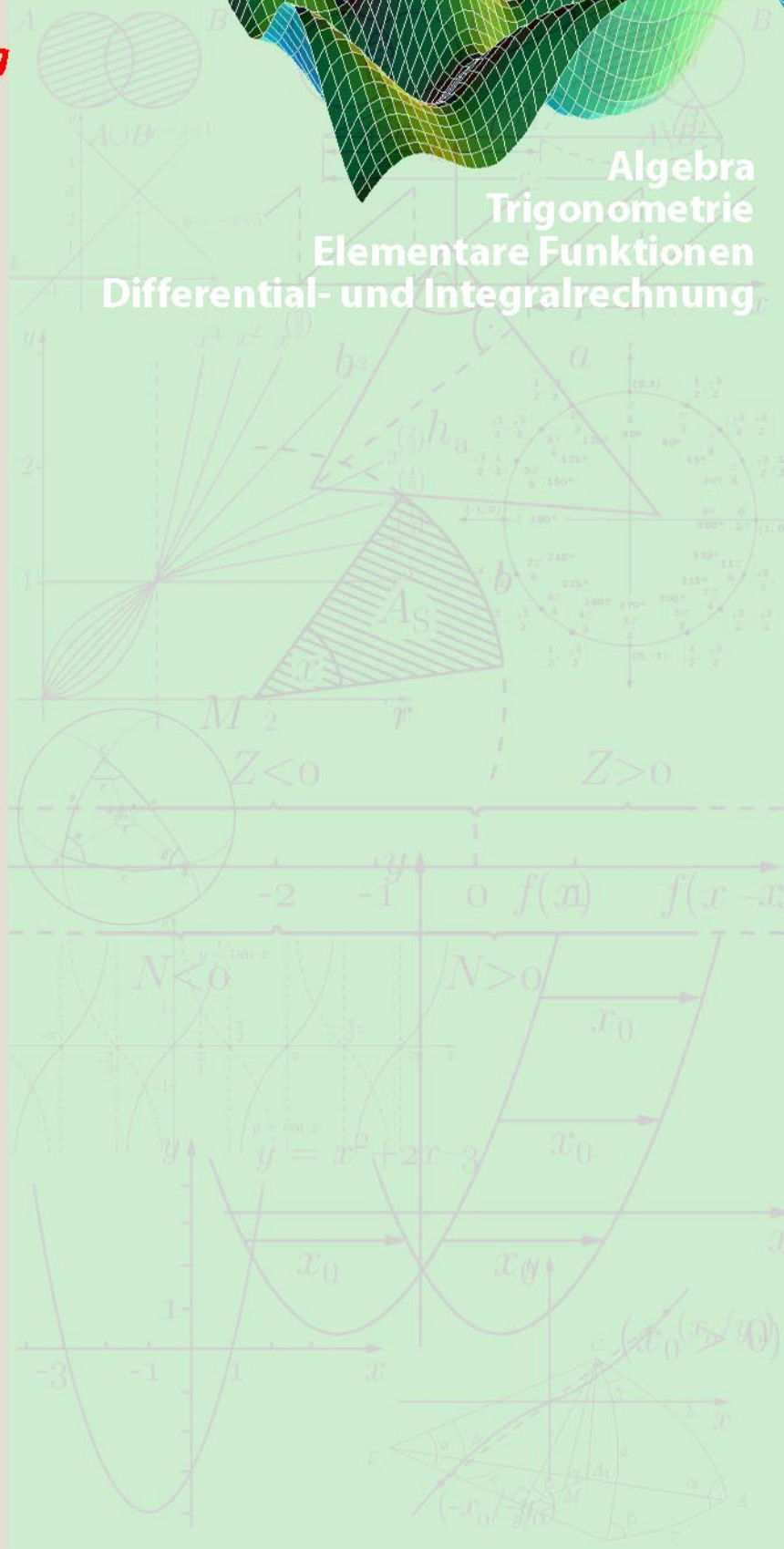


# Aufgaben

**Anwendungsorientierte  
Mathematik am Berufskolleg**

Algebra  
Trigonometrie  
Elementare Funktionen  
Differential- und Integralrechnung



## 1 Aufgaben zur Algebra

### A 1

- (a) Jemand verleiht 15 000 EUR und erhält nach einem Jahr 16 875 EUR zurück.  
Wie hoch war der Zinssatz?
- (b) Auf ein Zuwachssparbuch werden 4 000 EUR eingezahlt. Verzinst wird das Guthaben im 1. Jahr mit 3 %, im 2. Jahr mit 4 %, im 3. Jahr mit 5 %, im 4. Jahr mit 8 %.  
Die jeweils am Jahresende fälligen Zinsen werden mitverzinst.  
Welcher Betrag steht nach Ablauf der 4 Jahre zur Verfügung?

### A 2

Ein Computerverkäufer bietet 25 % Rabatt auf ein Gerät. Allerdings kommt dann anschließend noch 16 % Mehrwertsteuer dazu.

Ein Kunde besteht darauf, dass zuerst die Mehrwertsteuer berechnet wird und dann der Rabatt berechnet wird.

Was sagen Sie dazu?

Kommt er besser weg?

### A 3

Schreiben Sie in der Form  $a \cdot 10^k$  mit  $1 \leq a < 10$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (ganze Zahl):

- (a) 300 000
- (b) 0,000 000 37
- (c)  $2,2 \cdot 10^{-12} - 1,2 \cdot 10^{-13}$

### A 4

Gegeben sind die Punkte  $A(0/-2, 5)$ ,  $B(6/0)$ ,  $C(3/4)$ ,  $D(-3/1, 5)$ .

- (a) Ermitteln Sie Seiten- und Diagonalenlängen des Vierecks  $ABCD$ .  
Um was für ein Viereck handelt es sich?
- (b) Geben Sie die Geradengleichungen der Diagonalen an.  
Welche Koordinaten hat der Diagonalschnittpunkt?

### A 5

Gegeben sind die Punkte  $A(-2/3)$  und  $B(2/-1)$ . Wie lautet die Gleichung der Geraden

- (a) durch  $A$  und  $B$ ? Wie groß sind die Achsenabschnitte?
- (b) durch  $A$  mit Steigung  $\frac{1}{2}$ ?
- (c) durch  $B$ , die mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $120^\circ$  bildet?
- (d) durch  $B$ , die denselben  $y$ -Achsenabschnitt hat wie die Gerade mit der Gleichung  $3x - 2y + 4 = 0$ ?

### A 6

Liegen die Punkte  $A(3/5)$ ,  $B(2/7)$ ,  $C(-1/-3)$ ,  $D(-2/-6)$  auf oder über oder unter der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x - 1$ ?

**A 7**

Skizzieren Sie die Gebiete in der  $x, y$ -Ebene, deren Punkte folgende Ungleichungen erfüllen:

(a)  $y < 2 - x; x > -2; y > -2$

(b)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} \leq 1; y \geq x + 2; x \geq -4$

**A 8**

Schreiben Sie ohne Klammern.

(a)  $(y - 3x)^2$                       (b)  $(2x - y)(2x + y)$   
 (c)  $(2a^2 - x^2)(2a^2 + x^2)$       (d)  $((2a)^2 - x)((2a)^2 + x)$

**A 9**

Klammern Sie geeignete Faktoren aus.

(a)  $5a + 5b - 5c$

(b)  $7a - ya + ax$

(c)  $17ab^2c^3 - 51cb^2a^3$

**A 10**

Schreiben Sie als binomische Formel.

(a)  $a^2 + 2a + 1$

(b)  $1 - 2x + x^2$

(c)  $49r^2 + 70rs + 25s^2$

(d)  $a^2 - 10$

(e)  $81r^2 - 196s^2$

**A 11**

Ergänzen Sie die fehlenden Summanden.

(a)  $(a - \underline{\hspace{1cm}})^2 = a^2 - \underline{\hspace{1cm}} + 121$

(b)  $(b - \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 2bc + c^2$

(c)  $(c + \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 20c + 100$

(d)  $(\underline{\hspace{1cm}} - 4d)^2 = 25a^2 - 40ad + \underline{\hspace{1cm}}$

**A 12**

Fassen Sie zusammen.

(a)  $\frac{15}{17} + \frac{6}{17} - \frac{13}{17}$                       (b)  $\frac{6}{3a} - \frac{15}{5a} + \frac{35}{7a} - \frac{14}{2a}$   
 (c)  $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+2} + \frac{x+3}{x+2}$                       (d)  $\frac{4}{2x+6} - \frac{3}{x+3} + \frac{3x+6}{3x+9}$   
 (e)  $\frac{3}{-2-a} + \frac{4}{a+2} - \frac{a-2}{a^2-4}$

**A 13**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $\frac{1}{7} + \frac{3}{5}$       (b)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$       (c)  $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

**A 14**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $\frac{3}{16} + \frac{5}{24} - \frac{1}{8}$       (b)  $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b} + \frac{ab}{a^2-b^2}$

**A 15**

Für den Gesamtwiderstand  $R$  zweier parallel geschalteter Widerstände  $R_1, R_2$  gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- (a) Lösen Sie die Gleichung auf nach  $R$ .  
 (b) Lösen Sie die Gleichung auf nach  $R_1$ .

**A 16**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $3 \cdot (-5) - 6 \cdot (-4)$       (b)  $(-5)^2 + 6 \cdot (-4)$   
 (c)  $-3^2 - (-2)^3$       (d)  $a - 2(b - a) - 3(a - 2b)$   
 (e)  $(x + y)^2 + (\frac{1}{2}x - 2y)^2$       (f)  $a \cdot (c - 2d) + c \cdot (d - a) + (a \cdot d) \cdot 2$

**A 17**

Wie lassen sich folgende Ausdrücke umformen?

(a)  $(u^2 - 2v)^2 - (-v - u^2)^2$       (b)  $-(a^2 + b)^2$   
 (c)  $(x - y^3)^2$       (d)  $(a + d)^2(a + d)$

**A 18**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $\frac{2a+b}{a} - \frac{b}{2a}$       (b)  $\frac{(x-13) \cdot (-6)}{2} - \frac{2(4-6x)}{4}$

**A 19**

Lösen Sie die Gleichungen (Definitionsbereich beachten!)

(a)  $\frac{5x+1}{x+2} - \frac{2x^2+3x-8}{x^2+4x+4} = 3$   
 (b)  $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9}$   
 (c)  $\frac{3x}{x-2} = \frac{2x+7}{x+3} + \frac{6}{x-2}$

**A 20**

Lösen Sie die Gleichungen.

(a)  $x^2 + 6x + 5 = 0$       (b)  $x^2 + 6x + 9 = 0$   
 (c)  $x^2 + 6x + 13 = 0$       (d)  $x^2 - 2x = 0$   
 (e)  $x(x-2) = 3$       (f)  $5x^2 - 6x + 1,6 = 0$   
 (g)  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = 0$       (h)  $2x^3 + 4x^2 + 3x = 0$   
 (i)  $x(2x - 1) = 3(2x - 1)$

**A 21**

Zerlegen Sie die quadratischen Ausdrücke in Linearfaktoren.

(a)  $x^2 - 8x + 15$

(b)  $18x^2 - 9x + 1$

**A 22**

Wie lauten quadratische Gleichungen mit den Lösungen:

(a)  $x_1 = -1, \quad x_2 = 3$

(b)  $x_1 = -1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{3}$

**A 23**

Lösen Sie die biquadratischen Gleichungen.

(a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(b)  $\frac{1}{2}x^4 - 6x^2 - 32 = 0$

**A 24**

Für welche reellen Werte  $c$  hat die quadratische Gleichung 2 (1; 0) Lösungen?

(a)  $x^2 - 2x - c = 0$

(b)  $cx^2 + 6x + 1 = 0$

Hinweis: Diskriminante!

**A 25**

Lösen Sie die Gleichung  $x(x - 2) = c$  grafisch für  $c = 3, 2, 1, 0, -1, -2$ .

Hinweis: Zeichnen Sie hierzu die Funktionen der linken und der rechten Seite der Gleichung.

Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von A 24 (a).

**A 26**

Die Höhe einer senkrecht hochgeschossenen Rakete in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist gegeben durch die Beziehung  $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ .

Beantworten Sie für  $v_0 = 100$  m/s,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> folgende Fragen:

(a) Nach wie vielen Sekunden erreicht die Rakete die Höhe  $h_1 = 400$  m?

(b) Nach wie vielen Sekunden trifft die Rakete wieder am Boden auf?

**A 27**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{6}{7} + 5 : \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{7} + b : \frac{7}{a}$

**A 28**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke.

(a)  $\frac{2x^2 + x}{\frac{3x - 2}{2x + 1}}$

(b)  $1 - \frac{u}{1 - \frac{u}{u + 1}}$

**A 29**

Lösen Sie die Wurzelgleichungen.

(a)  $2 + \sqrt{3x(x-2)} = x$

(b)  $1 - \sqrt{2x-3} = x$

(c)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-3x} = 2$

**A 30**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a)  $\frac{26 \cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}}$       (b)  $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$

(c)  $\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}}$       (d)  $\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 : \left(\frac{ab^2}{c^2d^2}\right)^4$

(e)  $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$       (f)  $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a}}$

**A 31**

Bestimmen Sie den Logarithmus.

(a)  $\log_2 32$       (b)  $\log_6 \sqrt[3]{6}$

(c)  $\log_3 \frac{1}{9}$       (d)  $\log_{10} 1000$

(e)  $\log_a \sqrt[p]{a^p}$       (f)  $\ln \frac{e^x}{e^y}$

**A 32**

Fassen Sie zu einem Term zusammen (beliebige Logarithmus-Basis).

(a)  $\log 4 - \log 2 + \log 3$       (b)  $\log(\sqrt{a^3}) - \log \sqrt{a} + \log b$

(c)  $\log x + \log y - \log z$       (d)  $-\frac{1}{2}(\log u + 3 \log v)$

(e)  $3 \log u + \frac{1}{2} \log v^4 + 2 \log w$       (f)  $\frac{1}{3} \log a^{3m} - (m+1) \log a$

**A 33**

Zerlegen Sie möglichst weit ( $a, b, c, d > 0; u + v > 0$ )

(a)  $\ln \frac{a^3 b^2 c}{d^4}$       (b)  $\ln(a^2 + a)$

(c)  $\ln(u^2 + 1)$       (d)  $\ln[(u+v)^2]$

## 2 Aufgaben zu elementaren Funktionen

### F 1

Zeichnen Sie die Geraden mit den Gleichungen

(a)  $g : y = 2x - 1$

(b)  $h : y = -0,4x + 2$

(c)  $i : y = 2x + 3$

(d)  $j : y = x - 3$

(e)  $k : y = 2,5x$  in **ein** Diagramm.

Welche Geraden sind parallel? Welche stehen senkrecht aufeinander?

Überprüfen Sie zeichnerisch und rechnerisch, auf welchen dieser Geraden der Punkt  $(-2/-5)$  liegt.

### F 2

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $(3/0), (7/2)$ .

### F 3

Wie lauten die Gleichungen der Geraden durch den Punkt  $(3/5)$ ,

(a) die parallel zur Geraden  $y = -2x + 4$  ist,

(b) die parallel zur  $x$ -Achse ist,

(c) die parallel zur  $y$ -Achse ist.

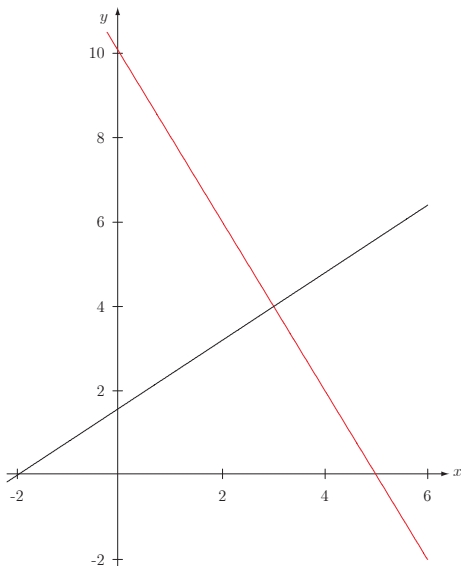
### F 4

Die zwei skizzierten Geraden bilden mit der  $x$ -Achse ein Dreieck  $D_1$  und mit der  $y$ -Achse ein Dreieck  $D_2$ .

(a) Stellen Sie Geradengleichungen auf und überprüfen Sie, ob die errechneten Schnittpunkte mit den Eckpunkten  $(-2/0), (5/0), (3/4)$  übereinstimmen.

(b) Berechnen Sie die Fläche und die Winkel des Dreiecks  $D_1$ .

(c) Schätzen Sie mit Hilfe der Zeichnung ab, welche der beiden Dreiecksflächen größer ist (z.B. Kästchen zählen) und überprüfen Sie diese Schätzung mit einer Rechnung.



**F 5**

Zwei Züge fahren mit unterschiedlichen, aber konstanten Geschwindigkeiten (80 km/h bzw. 60 km/h) aufeinander zu.

Zur Zeit  $t = 0$  haben sie eine Entfernung von 20 km.

- (a) Stellen Sie in einem Weg-Zeit-Diagramm die Bewegung dar.
- (b) Bestimmen Sie daraus, wann und wo sie sich begegnen.
- (c) Bestimmen Sie Ort und Zeit der Begegnung auch rechnerisch.

**F 6**

In den USA wird die Temperatur in  $^{\circ}\text{F}$  (Fahrenheit gemessen).

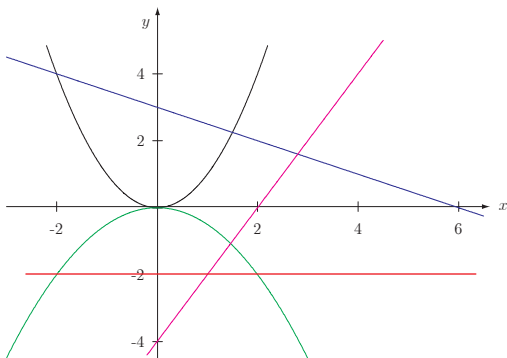
Der Temperatur  $0^{\circ}\text{C}$  entspricht die Temperatur  $32^{\circ}\text{F}$ , einer Temperaturzunahme um  $5^{\circ}\text{C}$  entspricht eine Temperaturzunahme von  $9^{\circ}\text{F}$ .

- (a) Entwickeln Sie eine Formel, mit der man aus der Temperatur  $c$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ) die Temperatur  $f$  (in  $^{\circ}\text{F}$ ) berechnen kann.
- (b) Entwickeln Sie eine zweite Formel, mit der man aus  $f$  die Temperatur  $c$  berechnen kann.

**F 7**

Welche Funktionsgleichungen gehören zu den hier skizzierten Schaubildern?

Berechnen Sie einige Schnittpunkte und vergleichen Sie mit den Schnittpunkten aus dem Schaubild.



**F 8**

Bestimmen Sie die Nullstellen von

- (a)  $y = x^2 - 3x + 2$
- (b)  $y = x^2 + 4x$

Wie kann man daraus ganz einfach den Scheitel der Parabeln bestimmen?

**F 9**

Geben Sie eine Parabel der Form  $y = ax^2$  an, auf welcher der Punkt  $(-2/-5)$  liegt.

**F 10**

Zeichnen Sie die Schaubilder der quadratischen Funktionen

- (a)  $y = (x + 3)^2$
- (b)  $y = (x + 3)^2 - 2$
- (c)  $y = (x - 1)^2 + 1$

Wie entstehen die Parabeln aus der Normalparabel  $y = x^2$

**F 11**

Bestimmen Sie die Gleichung einer Normalparabel, die nach unten geöffnet ist, und

- (a) den Scheitel bei  $(0/4)$  hat,
- (b) den Scheitel bei  $(2/0)$  hat,
- (c) den Scheitel bei  $(3/1)$  hat.

**F 12**

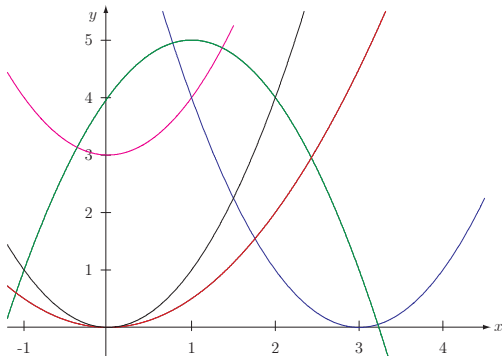
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel

- (a) mit dem Scheitel in  $(2/4)$ , die durch den Punkt  $(4/3)$  geht,
- (b) durch die Punkte  $(0/0)$ ,  $(6/0)$  und  $(1/5)$ ,
- (c) durch die Punkte  $(0/0)$ ,  $(1/3)$  und  $(2/4)$ .

**F 13**

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zu den hier skizzierten Parabeln.

Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Ergebnisse mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners.



**F 14**

Zeichnen Sie die Schaubilder von  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^4$  in ein Diagramm.

Verwenden Sie dazu eine Wertetabelle mit den  $x$ -Werten  $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$  ohne Zuhilfenahme des Rechners.

Worin unterscheiden sich die Schaubilder von  $y = x^2$  und  $y = x^4$ ?

Zeichnen Sie in ähnlicher Weise die Schaubilder von  $y = x^{-1}$ ,  $y = x^{-2}$  in ein Diagramm.

Wie verhalten sich diese Kurven für große Werte von  $x$  ( $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ )

Wie verhalten sie sich in der Nähe von  $x = 0$ ?

Warum ist  $2^0 = 1$ ?

Warum ist  $2^{-3} = 0,125$ ?

**F 15**

Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen den Schaubildern von  $y = x^2$  und  $y = \sqrt{x}$ .

**F 16**

Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen den Schaubildern von  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = -\sqrt{4 - x^2}$ .

**F 17**

Wie entstehen die Schaubilder der folgenden Funktionen aus den Grundfunktionen

$$(y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x^2}, y = \sqrt{x})$$

(a)  $y = (x - 1)^2 + 3$

(b)  $y = (x + 1)^3$

(c)  $y = 2 + \frac{1}{(x - 3)^2}$

(d)  $y = 2\sqrt{4 - x}$

**F 18**

Ergänzen Sie:

(a) Ersetzt man in einer Kurvengleichung  $x$  durch  $(x - 2)$ , dann wird die Kurve um ..... nach ..... verschoben.

(b) Ersetzt man in einer Kurvengleichung  $y$  durch  $(y + 3)$ , dann wird die Kurve um ..... nach ..... verschoben.

Formulieren Sie einen allgemeinen Verschiebungssatz.

### 3 Aufgaben zur Trigonometrie

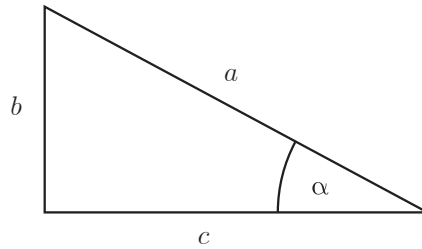
**T 1**

Vervollständigen Sie:

(a)  $\sin \alpha =$

$\sin(90^\circ - \alpha) =$

$\frac{b}{c} =$

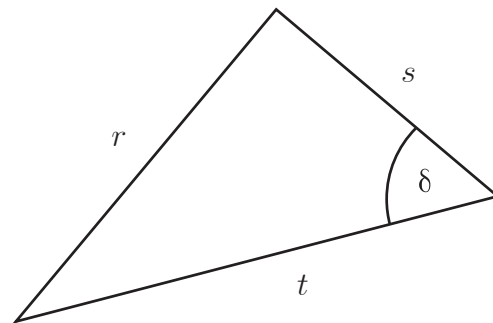


$\frac{a}{c} =$

(b)  $\cos \delta =$

$\tan \delta =$

$\frac{s}{t} =$



$\frac{s}{r} =$

**T 2**

Skizzieren Sie einen Schihang mit 100 % Steigung.  
Gibt es auch Schihänge mit 500 % Steigung?

**T 3**

Auf einer Straßenkarte mit dem Maßstab 1 : 25 000 hat ein Straßenstück die Länge 5 cm. Die Steigung wird mit 8 % angegeben.

Wie lange ist das Straßenstück in Wirklichkeit?

Spielt es eine Rolle, ob die Straße geradeaus führt?

**T 4**

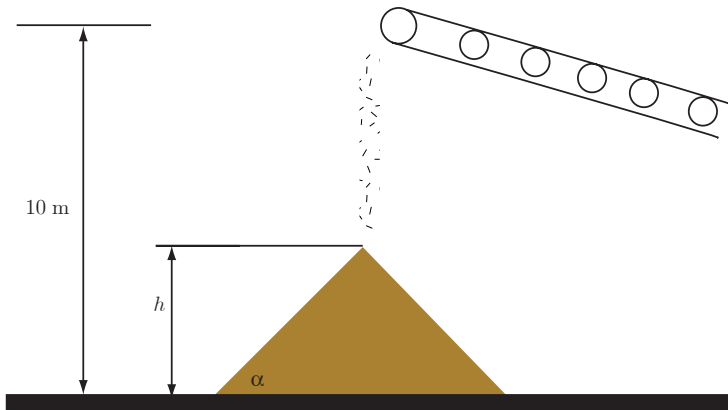
Eine horizontal verlaufende Straße führt in gerader Linie zu einem Turm. Von der Plattform des Turmes aus sieht man die Kilometersteine 3,2 und 3,3 unter einem Winkel von  $\alpha = 22,51^\circ$  und  $\beta = 39,14^\circ$  zur Horizontalen.

Wie hoch ist dieser Turm und wie weit ist er von dem im näher gelegenen Kilometerstein entfernt?

**T 5**

Von einem Förderband wird pro Sekunde  $1 \text{ dm}^3$  Sand transportiert und auf einem Sandberg mit dem Böschungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  aufgetürmt.

(Gleichgültig, ob ein Kind einen kleinen oder ein Förderband einen großen Sandberg auftürmt: Gleiches Schüttgut bildet immer gleiche Neigungswinkel.)



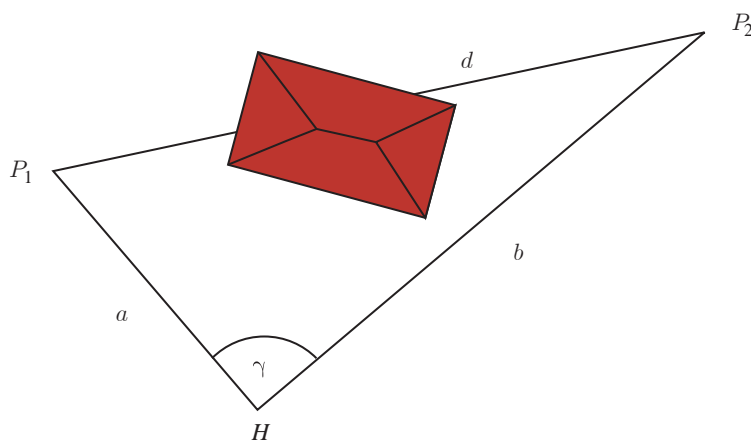
Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

Zeit $t$ in s	0	1	2	3	4	50
Kegelvolumen $V$ in $\text{dm}^3$	0					
Kegelhöhe $h$ in dm	0					

**T 6**

Ein Geodät möchte die Entfernung  $d$  vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$  bestimmen. Leider ist ihm die direkte Sicht durch ein dazwischen stehendes Haus behindert. Er kann aber von einem Hilfspunkt  $H$  die Entfernungen zu den zwei Punkten sowie den eingeschlossenen Winkel  $\gamma$  messen.

Wie groß ist die Entfernung  $d$  vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$  ?



**T 7**

- Bestimmen Sie möglichst viele Punkte, deren Koordinaten die Gleichung  $x^2 + y^2 = 25$  erfüllen. Was fällt Ihnen auf? Äußern Sie eine Vermutung.
- Zeichnen Sie möglichst viele Punkte der Kurve  $x^2 - y^2 = 25$ .
- Geben Sie die Gleichung eines Ursprungskreises mit dem Radius 3 bzw. 1 an.
- Wie lautet die Gleichung eines Einheitskreises mit dem Mittelpunkt  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$ ?  
Wie lautet die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $(m_1/m_2)$  und dem Radius  $r$ ?

**T 8**

Gegeben ist der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 169$ .

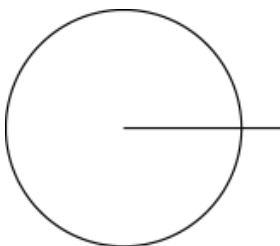
Welche der Punkte  $A(11/7)$ ,  $B(5/12)$ ,  $C(-8/10)$ ,  $D(-13/0)$ ,  $E(12/-5)$  liegen auf, innerhalb bzw. außerhalb des Kreises?

**T 9**

(a) Berechnen Sie die Werte der folgenden Wertetabelle:

$\alpha$	$1^\circ$	$10^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$	$400^\circ$	$720^\circ$
$b$											

(b) Zeichnen Sie in den nebenstehenden Einheitskreis die Winkel mit folgenden Bogenmaßen ein:



$$b = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

(c) Wie viel Grad hat ein Winkel mit dem Bogenmaß  $3\pi$  ( $\frac{7}{2}\pi$ ,  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $-5\pi$ , ...)?

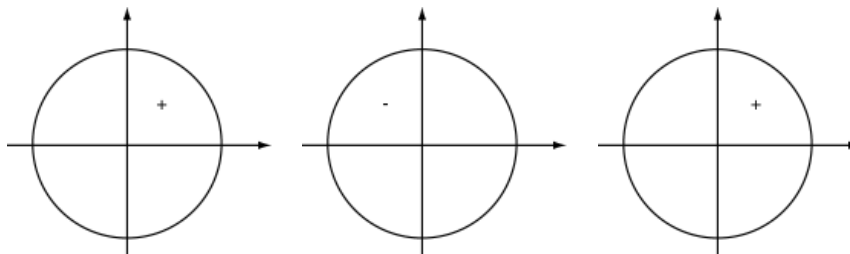
(d) Überprüfen Sie, ob Ihr Taschenrechner auf Bogenmaß eingestellt ist: Probieren Sie es aus.

**T 10**

(a) Wie werden Sinus und Kosinus für Winkel größer als  $90^\circ$  definiert?

(b) Für Winkel zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  ist  $\cos x$  negativ. (Warum?)

(c) Ergänzen Sie in jedem Quadranten der folgenden Abbildungen die fehlenden Vorzeichen:



Vorzeichen von  $\sin x$

Vorzeichen von  $\cos x$

Vorzeichen von  $\tan x$

Zeichnen Sie in den nebenstehenden Einheitskreis die "wichtigen Winkel"  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ein und lesen Sie die Werte der trigonometrischen Funktionen ab. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten der folgenden Tabelle:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

**T 11**

Welche der folgenden Gleichungen sind lösbar, welche nicht?  
Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Lösung mit dem Taschenrechner.

- (a)  $\sin(2x - 1) = 2$
- (b)  $\sin(2x) = 2 + \cos x$
- (c)  $2 \sin x = 5 - \frac{1}{3}x$

**T 12**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen so weit wie möglich exakt ( $D = \mathbb{R}$ ).  
Notieren Sie, welche Tipps Sie dabei angewandt haben.  
Überprüfen Sie Ihre Lösung mit dem Taschenrechner.

- (a)  $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
- (b)  $2 - 3 \cos(4x) = 0$
- (c)  $\sin(2x) - \cos x = 0$
- (d)  $2 \sin^2 x + \cos(2x) = 1$

**T 13**

Erfinden Sie selbst trigonometrische Gleichungen, welche (unter anderem) die angegebene(n) Lösung(en) besitzen.

- (a)  $x = 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$
- (b)  $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{4}$
- (c)  $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$
- (d)  $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{2}$

**T 14**

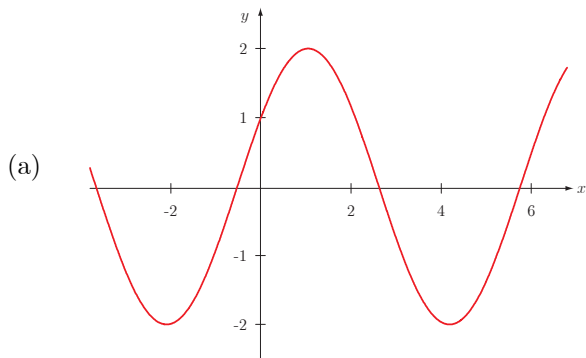
Beschreiben Sie den Verlauf der Schaubilder.  
Begründen Sie Ihre Aussage mit dem Funktionsterm:

- (a)  $f_1(x) = 3 \sin(\frac{1}{2}x)$
- (b)  $f_2(x) = 1 - \cos(x - \frac{\pi}{3})$
- (c)  $f_3(x) = -\frac{3}{2} \sin(2x - 1)$
- (d)  $f_4(x) = 3 \cos(\pi x)$
- (e)  $f_5(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$
- (f)  $f_6(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{1}{3}x + 1)$

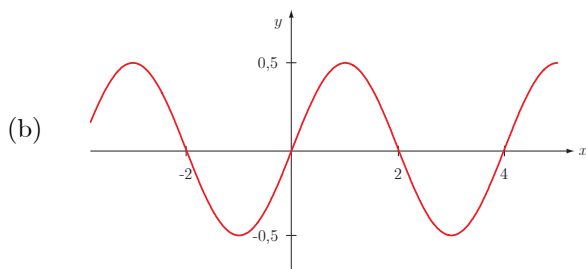
Untersuchen Sie jedes Mal die Amplitude und die Periode des Schaubildes.  
Man nennt die Anzahl der Schwingungsdurchgänge, die innerhalb eines Intervalls der Länge  $2\pi$  stattfinden, die Frequenz. Geben Sie die Frequenzen der obigen Funktionen an.  
Fällt Ihnen an den Ergebnissen etwas auf?

**T 15**

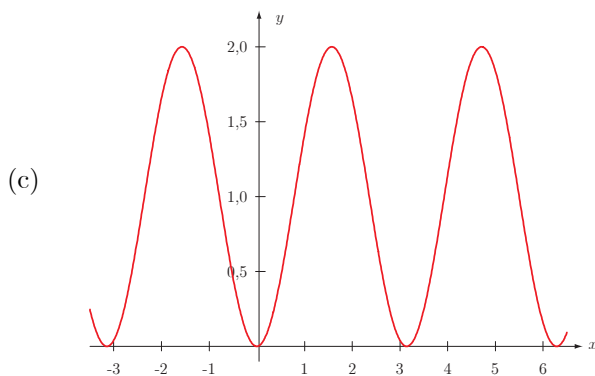
Erkennen Sie folgende Schaubilder?



- $f(x) = 1 + \cos(x - \frac{\pi}{3})$
- $f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
- $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$
- $f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{6})$
- $f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$



- $f(x) = -\frac{1}{2} \cos[\frac{\pi}{2}(x + 1)]$
- $f(x) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$
- $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$
- $f(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}x - 1)$
- $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{2})$



- $f(x) = -2 \cos(x - \frac{\pi}{2})$
- $f(x) = 2 \sin(x)$
- $f(x) = 1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})$
- $f(x) = 1 - \cos(2x)$
- $f(x) = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{2})$

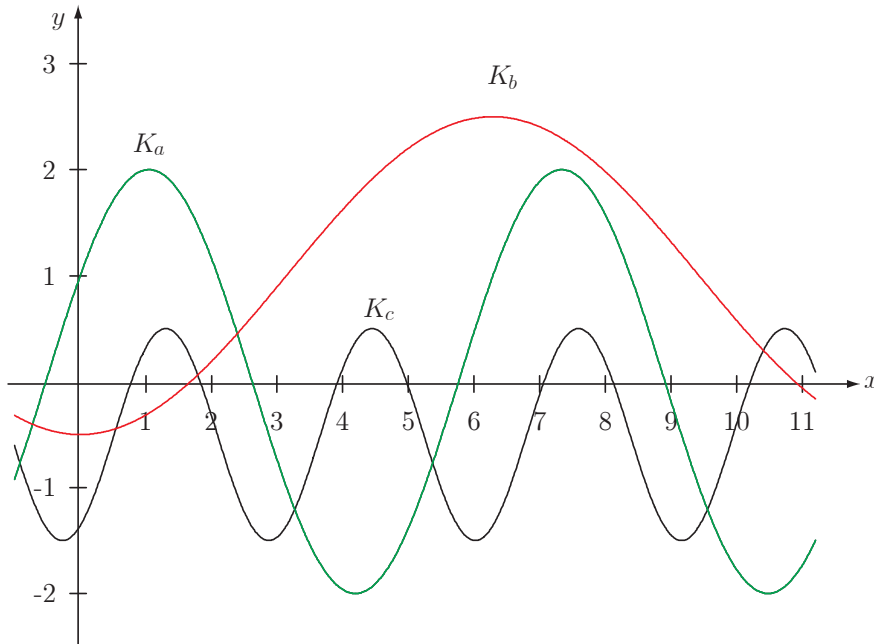
**T 16**

Beschreiben Sie die Eigenschaften der folgenden Funktionen und ihrer Schaubilder (Definitions- und Wertebereich, Symmetrie, Periode, Amplitude, "Startpunkt", ...):

- (a)  $f(x) = 2 \sin(x) + 1$
- (b)  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{4}x)$
- (c)  $f(x) = 2 - \frac{3}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3})$
- (d)  $f(x) = 1 + \cos(\frac{1}{2}x - 1)$

**T 17**

Zu jedem der Schaubilder gehört eine der Funktionen. Treffen Sie die Zuordnung und bestimmen Sie die fehlenden Parameter. (Kurze Begründung.)



- (a)  $f_a(x) = a \sin(x + \frac{\pi}{6})$    (b)  $f_b(x) = 1 - \frac{3}{2} \cos(bx)$    (c)  $f_c(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + c$

**T 18**

Beschreiben Sie die Eigenschaften der folgenden Funktionen und ihrer Schaubilder (Periode, Amplitude, Wertebereich, Symmetrie, "Startpunkt", ...). Skizzieren Sie jedes Mal das Schaubild.

- (a)  $f_1(x) = 2 \sin(x) + 1$  mit  $x \in \mathbb{R}$   
 (b)  $f_2(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{4}x)$  mit  $x \in \mathbb{R}$   
 (c)  $f_3(x) = 2 - \frac{3}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3})$  mit  $x \in \mathbb{R}$

**T 19**

Berechnen Sie exakt sämtliche Nullstellen der Funktionen:

- (a)  $f_1(x) = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$  mit  $x \in \mathbb{R}$   
 (b)  $f_2(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6})$  mit  $x \in [-4; 4]$   
 (c)  $f_3(x) = 1 + 2 \sin(\frac{3}{2}x)$  mit  $x \in \mathbb{R}_+^*$   
 (d)  $f_4(x) = 4 - 4 \cos(x - 1)$  mit  $x \in [-2\pi; 2\pi]$

**T 20**

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen:

- (a)  $2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$  mit  $x \in [-\pi; 2\pi]$   
 (b)  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(2x)$  mit  $x \in [0; 4\pi]$   
 (c)  $1 - \sin(\pi x) = 2 \cos(\frac{\pi}{2}x) - 1$  mit  $x \in [-4; 4]$

## 4 Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung

### DI 1

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 schneidet die  $x$ -Achse bei  $x_1 = 6$  und hat den Ursprung als Hochpunkt. Die Tangente an die Kurve an der Stelle  $x_2 = 1$  ist parallel zur Geraden  $y = -\frac{9}{8}x - 5$ . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

### DI 2

- (a) Die Kurven  $y = x^3$  und  $y = x$  schließen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Skizzieren Sie die Funktionen und berechnen Sie den Inhalt  $A$  dieses Flächenstücks.
- (b) Die Kurven  $y = x^3$  und  $y = mx$  mit positiver Konstante  $m > 0$  schließen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein mit dem Inhalt  $A(m)$ . Berechnen Sie  $A(m)$ . Für welchen Parameterwert  $m$  gilt  $A(m) = 1$ ?

### DI 3

- (a) Bestimmen Sie  $a$  so, dass gilt:  $\int_{-4}^a (2x - 3) dx = -10$
- (b) Bestimmen Sie  $c$  so, dass  $\int_0^c x(6 - x^2) dx$  den Wert 9 hat.

### DI 4

Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion vom Grad 3, die im Punkt  $P_1(-1/1)$  einen Hochpunkt und im Punkt  $P_2(1/-1)$  einen Wendepunkt hat. Besitzt die Funktionskurve einen Tiefpunkt, und wo liegt er?

### DI 5

Wie lautet die Gleichung der Wendetangente an die Kurve mit der Gleichung  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ?

### DI 6

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von den Kurven  $y = x^2 - 2x - 35$  und  $y = 0$  begrenzt wird.

### DI 7

Das Schaubild eines Polynoms 3. Grades geht durch den Ursprung und hat dort die Gerade  $y = 2x$  als Wendetangente; außerdem schneidet es die  $x$ -Achse in  $N(6/0)$ .

- (a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, ermitteln Sie die Punkte mit waagrechter Tangente und skizzieren Sie das Schaubild.
- (b) Berechnen Sie die von der Kurve, der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = 0$  und  $x = 6$  umschlossene Fläche.
- (c) Halbieren Sie diese Fläche durch eine Gerade parallel zur  $y$ -Achse.

### DI 8

Legen Sie an die Kurve  $y = \frac{1}{8}x^3$  Tangenten parallel zur Geraden  $y = \frac{3}{2}x$ . Verlangt sind die Gleichungen der Tangenten sowie die Koordinaten der Berührungspunkte. Welchen Abstand haben die beiden Tangenten?

### DI 9

Für jedes  $t > 0$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch  $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$  mit  $x \in \mathbb{R}$

Eine Parabel zweiter Ordnung  $P_t$  mit  $p_t(x) = -\frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$  geht durch die gemeinsamen Punkte von  $K_t$  mit der  $x$ -Achse und berührt  $K_t$  im Ursprung. Die beiden Schaubilder haben sonst keine weiteren Punkte gemeinsam.  $K_t$  teilt die von  $P_t$  und der  $x$ -Achse eingeschlossene Fläche. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der entstehenden Teilflächen?

**DI 10**

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Funktion  $f_t(x) = tx^2 - 2t^2x$ , mit  $t \in \mathbb{R}^+$  mit der  $x$ -Achse.

**DI 11**

Bestimmen Sie mit möglichst wenig Aufwand den Flächeninhalt zwischen den beiden Schaubildern der Funktionen  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  und  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ .  
Skizzieren Sie die beiden Schaubilder der Funktionen.

**DI 12**

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3} \text{ und } g(x) = 2x - 3$$

- (a) Bestimmen Sie Hochpunkt, Tiefpunkt und Wendepunkt der Kurve  $y = f(x)$ .
- (b) Die beiden Kurven  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  schneiden sich im Punkt  $P(1/-1)$ .  
Ermitteln Sie die weiteren Schnittpunkte.
- (c) Skizzieren Sie die beiden Funktionskurven mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilen (a) und (b).
- (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die beiden Kurven einschließen.

**DI 13**

Für welche Werte von  $a$  berühren sich die Kurven  $f(x) = x - 1$  und  $g(x) = ax^2$ ? Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Berührungspunkts.

**DI 14**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = ax^4 + 2x^3 + x^2.$$

In welchem Bereich muss man den Parameter  $a$  wählen, damit die Funktionskurve zwei Wendepunkte besitzt?

**DI 15**

Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals  $I_b = \int_0^b \frac{1}{2}x^2 \, dx$  und skizzieren Sie.

Bestimmen Sie  $b$  so, dass gilt:  $I_b = 288$

**DI 16**

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die an der Stelle  $x_0 = 0$  im Funktionswert und den ersten drei Ableitungen mit der Funktion  $f(x) = \sin x$  übereinstimmt.

**DI 17**

Bestimmen Sie  $c > 0$  so, dass die Fläche zwischen der Parabel  $y = \frac{1}{2}x^2$  und der Geraden  $y = c$  den Inhalt 72 hat.

**DI 18**

An die folgenden Kurven sind die Tangenten zu legen; parallel zu den gegebenen Geraden:

- (a)  $y = f(x) = x - \frac{1}{4}x^2$  und  $x + 2y = 0$
- (b)  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$  und  $x - 2y - 6 = 0$

**DI 19**

Bestimmen Sie den Inhalt der Flächen, die durch folgende Kurven begrenzt werden.

- (a)  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$
- (b)  $y = x^2 - x - 6$  und  $y = -x^2 + 5x + 14$

**DI 20**

Ein Körper bewegt sich auf einer  $s$ -Achse nach dem Gesetz

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

Gesucht ist seine Geschwindigkeit  $v(t)$  und seine Beschleunigung  $a(t)$  als Funktion von der Zeit  $t$ .

Zu welchen Zeiten ändert der Körper seine Bewegungsrichtung?

**Hinweis**

Die Geschwindigkeit  $v(t)$  ist die erste Ableitung des Ortes  $s(t)$  nach der Zeit  $t$ .

Die Beschleunigung  $a(t)$  ist die zweite Ableitung des Ortes  $s(t)$  nach der Zeit  $t$ .

**DI 21**

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  und  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- (a) Bilden Sie die Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(x)$ .
- (b) Berechnen Sie  $f^2(x) - g^2(x)$ .

**DI 22**

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Kurven  $y = \sin x$  und  $y = \cos x$  im Bereich zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte.

**DI 23**

- (a) Untersuchen Sie den Verlauf der Kurve  $y = bx^2 - ax^4$ , wenn  $a$  und  $b$  positive Konstanten sind. Für welche  $x$ -Werte verläuft die Kurve oberhalb, für welche unterhalb der  $x$ -Achse? Welche Abszissen ( $x$ -Koordinaten) haben die Punkte mit waagrechter Tangente und die Wendepunkte?
- (b) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass die Kurve die  $x$ -Achse im Punkt  $(4/0)$  schneidet und mit der  $x$ -Achse im ersten Quadranten die Fläche  $A = \frac{128}{15}$  einschließt. (Ergebnis:  $a = \frac{1}{16}$ ,  $b = 1$ ). Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) im Bereich  $-5 \leq x \leq 5$ . Auf welcher Parallelen zur  $x$ -Achse werden von der Kurve drei gleichlange Strecken ausgeschnitten?

**DI 24**

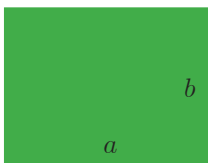
Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$  und  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ .

- (a) Zeigen Sie,  $f(x) > g(x)$  im Intervall  $[1; 3]$ .
- (b) Bestätigen Sie das Ergebnis von (a) mit Hilfe einer Skizze.
- (c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern der beiden Funktionen im Intervall  $[1; 3]$  eingeschlossen wird.
- (d) An welcher Stelle  $x_1 \in [1; 3]$  wird  $f(x) - g(x)$  minimal.
- (e) An welcher Stelle  $x_2 \in [1; 3]$  wird  $f(x) - g(x)$  maximal.
- (f) Die Gerade  $x = x_3$  mit  $x_3 \in [1; 3]$  schneidet das Schaubild von  $f$  im Punkt  $F$  und das Schaubild von  $g$  in  $G$ . Für welchen Wert von  $x_3$  sind die Tangente in diesen Punkten parallel?

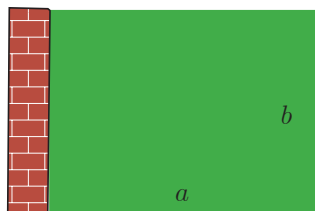
**DI 25**

Ein rechteckiges Freigehege soll so eingezäunt werden, dass sich eine möglichst große Fläche ergibt. Dazu steht ein Zaun der Länge 200 m zur Verfügung. Berechnen Sie für die skizzierten Fälle (A), (B), und (C) jeweils die Seitenlängen  $a$  und  $b$  des Freigeheges. Wie groß ist jeweils die maximale Fläche?

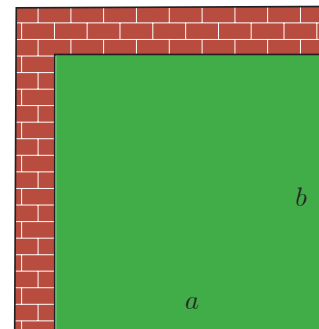
Fall(A)



Fall(B)



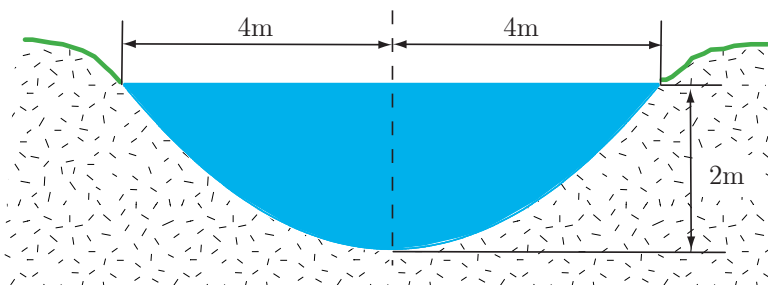
Fall(C)



**DI 26**

Der Querschnitt eines 8 m breiten und 2 m tiefen Kanals hat die Form einer Parabel (vgl. Skizze). Seine Länge beträgt 500 m.

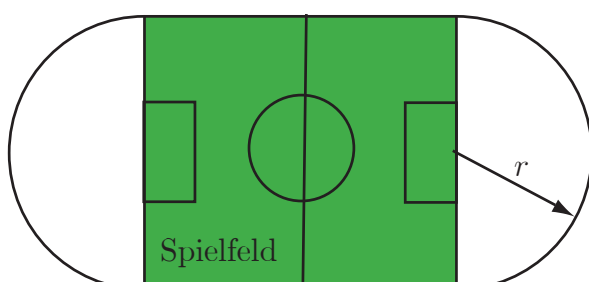
- Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel, in einem geeigneten Koordinatensystem. (1 LE entspricht 1 m in der Wirklichkeit)
- Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Kanals.
- Wie viel Wasser befindet sich im Kanal, wenn dieser ganz gefüllt ist? (Angabe in  $\text{m}^3$  und in Liter)
- Wie viel Prozent der maximalen Wassermenge befindet sich im Kanal, wenn dieser nur bis zur halben Höhe gefüllt ist?
- Bei welchem Wasserstand ist der Kanal halb voll?



**DI 27**

Eine Sportanlage wird durch eine 400 m-Laufbahn begrenzt (vgl. Skizze). Die Laufbahn besteht aus zwei parallelen Strecken und zwei angesetzten Halbkreisen.

- Für welchen Radius  $r$  der Halbkreise wird der Flächeninhalt des rechteckigen Spielfeldes maximal?
- Wie viel Prozent der Gesamtfläche der Sportanlage entfällt dabei auf das Spielfeld?



**DI 28**

Gegeben ist die Kurve  $K_0$  mit der Gleichung  $y = e^x$ . Durch Verschiebung von  $K_0$  um 1 nach links entsteht die Kurve  $K_1$ . Durch Verschiebung von  $K_0$  um 1 nach oben entsteht die Kurve  $K_2$ .

- (a) Skizzieren Sie  $K_0$ ,  $K_1$  und  $K_2$  in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- (b) Wie lauten die Gleichungen der Kurven  $K_1$  und  $K_2$ ?
- (c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Kurven  $K_1$  und  $K_2$ .
- (d) Die Kurven  $K_1$ ,  $K_2$  und die  $y$ -Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.

**DI 29**

- (a) Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-kt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ .  $k$  ist eine positive Konstante.

Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion  $f_1(t)$ . (Schaubild für  $k = 1$ )

Welchen Einfluss hat die Konstante  $k$  auf die Form der Kurve? (Fallunterscheidung:  $0 < k < 1$  und  $k > 1$ )

Warum ist die waagrechte Asymptote für  $t \rightarrow \infty$  unabhängig von  $k$ ?

- (b) Einschaltvorgänge werden beschrieben durch Funktionen der Form  $g_k(t) = A \cdot f_k(t)$  mit einer positiven Konstanten  $A$ .
  - (i) Welche Bedeutung hat die Konstante  $A$ ?
  - (ii) Für welchen Wert der Variablen  $t$  gilt:  $g_k(t) = \frac{1}{2}A$
  - (iii) Die Tangente an die Kurve  $y = g_k(t)$  im Ursprung schneidet die Gerade  $y = A$  im Punkt  $S$ . Bestimmen Sie die  $x$ -Koordinate des Punktes  $S$ .

**Dieses Curriculum wurde formuliert von:**

Simon Dieterich	FH Karlsruhe
Prof. Dr. Klaus Dürschnabel	FH Karlsruhe
StD Dr. Jörg Heuß	SSP Karlsruhe
StD Dr. Gerhard Keller	
Prof. Dr. Hans-Dieter Klein	FH Ulm
Prof. Dr. Harro Kümmerer	FH Esslingen
Prof. Dr. Rainer Roos	FH Karlsruhe
StD Klaus Roth	SSSP Freiburg
Prof. Dr. Axel Stahl	FH Esslingen
StD Bruno Weber	LEU Stuttgart
StD Dr. Alfred Weckherlin	TO Stuttgart
StD'in Rita Wurth	Mettnau-Schule Radolfzell